



اسم الطالب

٢٠٢١

تصميم
محمود عوض
معلم رياضيات

تصميم
محمود عوض
معلم رياضيات

ملازمة

هندسة
وحساب مثلثات



الترم
الأول

الصف
الثالث
الإعدادي

تصميم
محمود عوض
معلم رياضيات

تصميم
محمود عوض
معلم رياضيات



معلم
أول
رياضيات

محمد عوفى حسن

إعداد
و
تصميم

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

القياس الستيني للزاوية الحادة

- ♦ وحدات القياس الستيني للزاوية هي : الدرجة ° ، الدقيقة ' ، الثانية "
- ♦ الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية أي أن ٦٠' = ١° ، ٦٠" = ١'
- ♦ في الآلة الحاسبة يستخدم مفتاح \circ لكتابة الدرجات والدقائق والثواني

مثال ١ اكتب الزاوية ٤٢° ٢٤' ٣٥" بالدرجات:

الحل: نحول باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي:

ابدأ \rightarrow \circ ٣٥ \circ ٢٤ \circ ٤٢ \circ = \circ ٣٥,٤١١٦٦٦٧

فيكون الناتج هو

مثال ٢ اكتب الزاوية ٥٤,٣٦° بالقياس الستيني:

الحل: نحول باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي:

ابدأ \rightarrow \circ ٥٤,٣٦ \circ = \circ ٥٤ ٢١ ٣٦

فيكون الناتج هو

تذكر

- مجموع قياس الزاويتين المتتامتين = ٩٠°
- مجموع قياس الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

مثال ٢ إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستيني لكل منها

الحل

قياس الزاوية الأولى = ٣ م ،
قياس الزاوية الثانية = ٤ م
قياس الزاوية الثالثة = ٧ م

∴ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠

∴ ١٨٠ = ٣م + ٤م + ٧م

∴ ١٨٠ = ١٤م

∴ ١٢,٩ = م

الأولى = \circ ٣٨,٧ = ١٢,٩ × ٣

الثانية = \circ ٥١,٦ = ١٢,٩ × ٤

الثالثة = \circ ٩٠,٣ = ١٢,٩ × ٧

مثال ١ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستيني

الحل

قياس الزاوية الأولى = ٣ م ،
قياس الزاوية الثانية = ٥ م

∴ مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠

∴ ١٨٠ = ٣م + ٥م

قياس الزاوية الأولى = ٣م = ٢٢,٥ × ٣ = ٦٧,٥

قياس الزاوية الثانية = ٥م = ٢٢,٥ × ٥ = ١١٢,٥

ظا

جتا

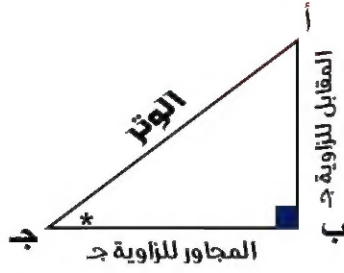
جا

النسب المثلثية الأساسية

إذا كان Δ أ ب ج قائم الزاوية في ب

يمكن حساب النسب المثلثية لأي من الزاويتين الحادتين أ ، ج

ولنأخذ الزاوية ج كمثال :

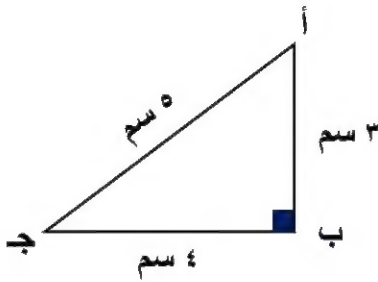


$$\text{جا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} \quad (\text{جيب الزاوية } \sin)$$

$$\text{جتا ج} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} \quad (\text{جيب تمام الزاوية } \cos)$$

$$\text{ظا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}} \quad (\text{ظل الزاوية } \tan)$$

◆ مثال: من الشكل المقابل:



$$\text{جا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}, \quad \text{جتا ج} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ظا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4} \quad \text{لاحظ أن: ظا ج} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \text{وهكذا}$$

$$\text{جا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}, \quad \text{جتا أ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ظا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{3} \quad \text{لاحظ أن: جتا أ} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \quad \text{وهكذا}$$

ملحوظة هامة

إذا طلب منك قياس زاوية لا بد أن تحسب جا أو جتا أو ظا للزاوية المطلوب قياسها ثم تستخدم مفتاح **shift**

فمثلاً: إذا كان جتا ب = $\frac{1}{4}$ فإن الزاوية تحسب كالتالي: $\frac{1}{4} \rightarrow \sin \rightarrow \text{shift}$ فيكون ق(ب) = 60°

إذا كان جا ص = $\frac{3}{5}$ فإن الزاوية تحسب كالتالي: $\frac{3}{5} \rightarrow \cos \rightarrow \text{shift}$ فيكون ق(ص) = $36,5^\circ$

تذكير بنظرية فيثاغورث

إذا كان المثلث قائم يمكنك حساب طول الوتر أو طول ضلع من ضلعي القائمة

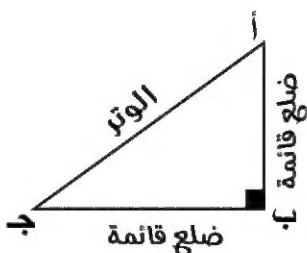
◆ **لحساب طول الوتر:** ربع ← اجمع ← اجذر

$$(\text{أ ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2 \quad \text{ومنها أ ج} = \sqrt{\text{الناتج}}$$

◆ **لحساب طول ضلع القائمة:** ربع ← اطرح ← اجذر

$$(\text{ب ج})^2 = (\text{أ ج})^2 - (\text{أ ب})^2 \quad \text{ومنها ب ج} = \sqrt{\text{الناتج}}$$

$$(\text{أ ب})^2 = (\text{أ ج})^2 - (\text{ب ج})^2 \quad \text{ومنها أ ب} = \sqrt{\text{الناتج}}$$

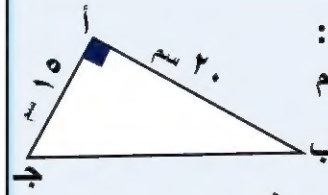


أمثلة محلولة

إعداد أ / محمود عوض حسن

مثال ١

في الشكل المقابل :
أ ج = ١٥ سم ، أب = ٢٠ سم



اثبت أن :

جتا ج جتا ب - جا ج جا ب = صفر

الحل

$$(ب ج) = ١٥^2 + ٢٠^2 = ٦٢٥$$

$$ب ج = ٢٥ \text{ سم}$$

الأيمن = جتا ج جتا ب - جا ج جا ب

$$\frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥} =$$

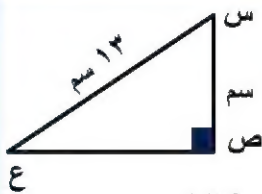
$$= \frac{٣٠٠}{٦٢٥} - \frac{٣٠٠}{٦٢٥} = \text{صفر}$$

مثال ٢

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص

فيه س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم أوجد :

(١) ظاس + ظاع (٢) جتاس جتا ع - جاس جاع



الحل

$$(ص ع) = ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤ = ١٢^2$$

$$ص ع = ١٢ \text{ سم}$$

$$(١) \text{ ظاس + ظاع} = \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} = \frac{١٦٩}{١٦٩}$$

(٢) جتاس جتا ع - جاس جاع

$$= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} - \frac{٥}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{٦٠}{١٦٩} - \frac{٦٠}{١٦٩} = \text{صفر}$$

مثال ٣

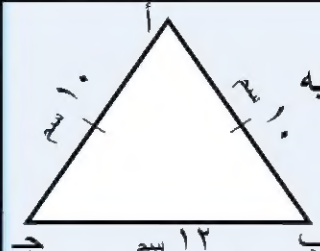
أ ب ج د متساوي الساقين فيه

أ ب = أ ج = ١٠ سم ،

ب ج = ١٢ سم

أوجد : (١) جاب

(٢) ق (أ ج ب)



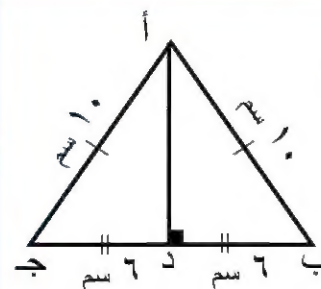
(٣) مساحة سطح Δ أ ب ج

الحل

العمل : نرسم أ د ⊥ ب ج

∴ أ د ينصف ب ج

$$∴ ب د = ٦ \text{ سم}$$



في Δ أ د ب من فيثاغورث :

$$(أ د) = (أ ب) - (ب د) = ٣٦ - ١٠٠ = ٦٤$$

$$∴ أ د = ٨ \text{ سم}$$

$$\text{جاب} = \frac{٨}{١٠} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{ق (ب)} = \text{Shift Sin} \frac{٨}{١٠}$$

$$\text{مساحة سطح } \Delta = \frac{١}{٢} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= ٨ \times ٦ = ٤٨ \text{ سم}^2$$

مثال ٤

في الشكل المقابل :

أ ب ج د مستطيل فيه

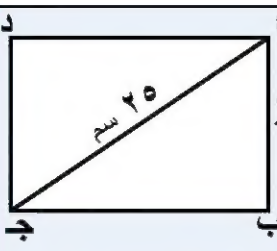
أ ب = ١٥ سم ، أ ج = ٢٥ سم

أوجد :

١- طول ب ج

٢- ق (أ ج ب)

٣- مساحة المستطيل أ ب ج د



الحل

في Δ أ ب ج من فيثاغورث :

$$(ب ج) = (أ ج) - (أ ب) = ٢٥ - ١٥ = ١٠$$

$$= ٢٢٥ - ٢٢٥ = ٤٠٠$$

∴ ب ج = ٢٠ سم المطلوب الأول

$$∴ \text{جا (أ ج ب)} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{١٥}{٢٥}$$

$$∴ \text{ق (أ ج ب)} = \text{Shift Sin} \frac{١٥}{٢٥} = ٣٦,٥$$

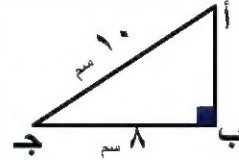
مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$= ٢٠ \times ١٥ = ٣٠٠ \text{ سم}^2$$

مثال ٥

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب
فيه أ ج = ١٠ سم ، ب ج = ٨ سم
اثبت أن : جا^٢ أ + ١ = ٢ جتا^٢ ج + جتا^٢ أ

الحل



$$(أ ب)^2 = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦$$

$$\therefore أ ب = ٦ \text{ سم}$$

$$\frac{١٦٤}{١٠٠} = ١ + \frac{٦٤}{١٠٠} = ١ + \left(\frac{٨}{١٠}\right)^2 = \text{الأيمن}$$

$$\frac{٣٦}{١٠٠} + \frac{٦٤}{١٠٠} \times ٢ = \left(\frac{٦}{١٠}\right)^2 + \left(\frac{٨}{١٠}\right)^2 \times ٢ = \text{الأيسر}$$

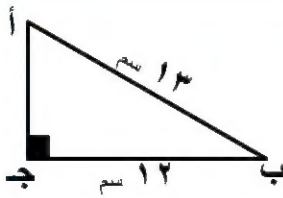
$$\frac{١٦٤}{١٠٠} = \frac{٣٦}{١٠٠} + \frac{١٢٨}{١٠٠} =$$

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

مثال ٦

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ج
حيث أ ب = ١٣ سم ، ب ج = ١٢ سم
(١) اثبت أن : جا أ جتا ب + جتا أ جاب = ١
(٢) أوجد : ١ + ظا أ

الحل



$$(أ ج)^2 = ١٦٩ - ١٤٤ = ٢٥$$

$$\therefore أ ج = ٥ \text{ سم}$$

$$(١) \text{ جا أ جتا ب + جتا أ جاب} =$$

$$\frac{٢٥}{١٦٩} + \frac{١٤٤}{١٦٩} = \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣}$$

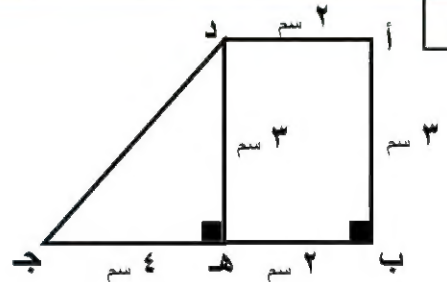
$$١ = \frac{١٦٩}{١٦٩} =$$

$$(٢) ١ + \text{ظا أ} = ١ + \left(\frac{١٢}{٥}\right)^2 = \frac{١٦٩}{٢٥} = \frac{١٤٤}{٢٥} + ١ = \frac{١٢}{٥} + ١ = \frac{١٢}{٥} + \frac{٥}{٥} = \frac{١٧}{٥}$$

مثال ٧

أ ب ج د شبه منحرف فيه
أ د // ب ج ، ق (ب) = ٩٠°
أ ب = ٣ سم ، ب ج = ٦ سم ، أ د = ٢ سم
أوجد طول د ج ثم أوجد قيمة جتا (ب ج د)

الحل



العمل: نرسم د ه ⊥ ب ج

الشكل أ ب ه د مستطيل

$$د ه = ٣ \text{ سم} ، ه ج = ٦ - ٢ = ٤ \text{ سم}$$

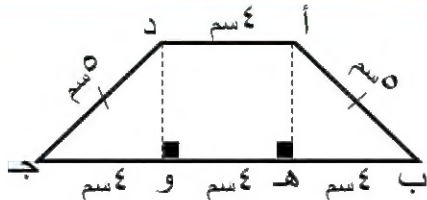
في Δ د ه ج : من فيثاغورث

$$(د ج)^2 = ٣^2 + ٤^2 = ٢٥$$

$$\therefore د ج = ٥ \text{ سم}$$

$$\text{جتا (ب ج د)} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$$

الحل



العمل: نرسم أ ه ، د و ⊥ ب ج

الشكل أ ه و د مستطيل

$$\therefore ه و = ٤ \text{ سم} ، ب ه = و ج = ٤ \text{ سم}$$

في Δ أ ه ب من فيثاغورث :

$$(أ ه)^2 = ٢٥ - ١٦ = ٩$$

$$\therefore أ ه = ٣ \text{ سم} \therefore د و = ٣ \text{ سم}$$

$$\text{الأيمن} = \frac{٣}{١} = \frac{\frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٤} \times ٥}{\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥}} = \frac{٣}{١} = \frac{٣}{١}$$

تدريبات

إعداد أ / محمود عوض حسن

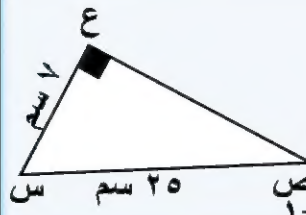
١ في الشكل المقابل:

س ص ع Δ قائم في ع

س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم

(١) أوجد: ظا س \times طا ص

(٢) اثبت أن: جا س + جا ص = ١



الحل

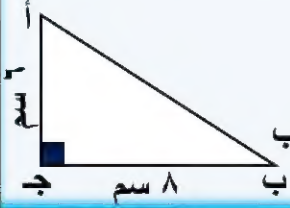
٢ في الشكل المقابل:

أ ب ج Δ قائم في ج

أ ج = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم

(١) أوجد: جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

(٢) أوجد ق (ب)



الحل

٣

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه :

س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم

فأوجد قيمة جتا س جتا ع - حاس جا ع

الحل

٤

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب حيث:

أ ب = ٧ سم ، ب ج = ٢٤ سم فأوجد قيمة:

(١) ٣ ظا أ \times طا ج (٢) جا أ + جا ب ج

الحل

تمارين على النسب المثلثية للزاوية الحادة

١ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٣ : ٤

فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستيني

٢ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين

٥ : ٢ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستيني

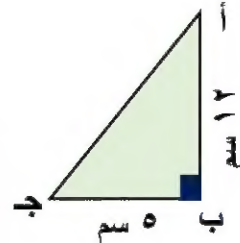
٣ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث الداخلة

٢ : ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منها بالقياس الستيني

٤ في الشكل المقابل:

أوجد النسب المثلثية الأساسية

للزاويتين أ ، ج

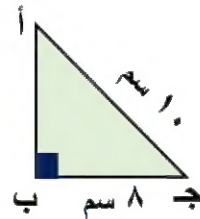


٥ في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث قائم في ب

أ ج = ١٠ سم ، ج ب = ٨ سم

أوجد قيمة: ج جتا أ + ج أ جتا ج



٦ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٢ أ ب = ٣ ج

فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية ج

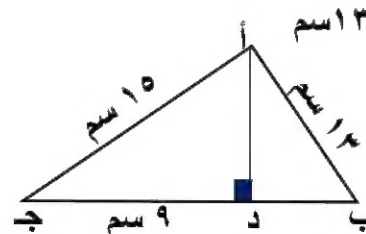
٧ في الشكل المقابل:

أ د ب ج ، أ ب = ١٣ سم

أ ج = ١٥ سم

د ج = ٩ سم

فأوجد قيمة ظا ب



٨ في الشكل المقابل:

أ ب ج د مستطيل فيه

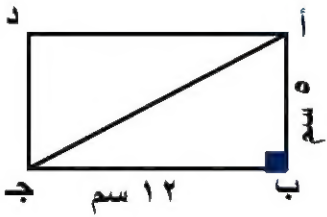
أ ب = ١٥ سم ، أ ج = ٢٥ سم

أوجد:

(١) طول أ ج

(٢) قيمة: ٥ ظا (أ د ج) - ١٣ جا (د أ ج)

(٣) مساحة المستطيل أ ب ج د



٩ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ج فيه

أ ج = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم

أوجد قيمة: جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

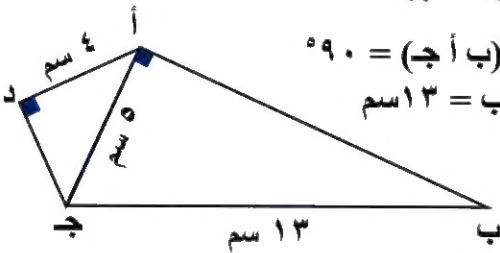
١٠ في الشكل المقابل:

ق (أ د ج) = ق (ب أ ج) = ٩٠°

أ د = ٤ سم ، ج ب = ١٣ سم

أوجد قيمة:

ظا (د أ ج) جا (أ ج ب) - جا ب جتا (ج أ د)



١١ أ ب ج مثلث فيه أ ب = أ ج = ١٠ سم

ب ج = ١٢ سم ، أ د ب ج يقطعه في د

(١) اثبت أن: جا ب + جتا ج = ٧/٥

(٢) أوجد قيمة جا² ج + جتا² ج

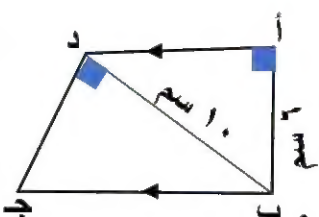
١٢ في الشكل المقابل:

أ ب ج د شبه منحرف قائم في ب

أ د // ب ج ، أ ب = ٦ سم

ب د = ١٠ سم ، ق (ب د ج) = ٩٠°

أوجد ظا (أ د ب) ، طول د ج



النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

الزاوية ٤٥

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا } ٤٥$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جتا } ٤٥$$

$$\text{ظا } ٤٥ = ١$$

الزاوية ٦٠

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جا } ٦٠$$

$$\frac{1}{2} = \text{جتا } ٦٠$$

$$\sqrt{3} = \text{ظا } ٦٠$$

الزاوية ٣٠

$$\frac{1}{2} = \text{جا } ٣٠$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جتا } ٣٠$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \text{ظا } ٣٠$$

ملاحظات هامة

$$\text{جا } ٣٠ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \text{جا } ٤٥ \quad \text{جتا } ٣٠ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) = \text{جتا } ٤٥ \quad \text{وهكذا}$$

$$\text{خد بالك: } \text{جتا } ٣٠ = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \right) \text{ وليس } ٩ \quad \text{جتا } ٦٠ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وليس } ٤ \quad \text{وهكذا}$$

$$\text{٢} \quad \text{جا الزاوية} = \text{جتا المتمة لها} \quad \text{مثل: جا } ٣٠ = \text{جتا } ٦٠, \text{ جا } ٦٠ = \text{جتا } ٣٠, \text{ جتا } ٢٥ = \text{جتا } ٦٥$$

$$\text{٣} \quad \text{ظا الزاوية} = \frac{\text{جا الزاوية}}{\text{جتا الزاوية}} \quad \text{مثل: ظا } ٣٠ = \frac{\text{جا } ٣٠}{\text{جتا } ٣٠} = \frac{1}{2} \quad \text{ظا } ٦٠ = \frac{\text{جا } ٦٠}{\text{جتا } ٦٠} = \frac{\sqrt{3}}{1/2} = \sqrt{3} \quad \text{ظا } ٤٥ = \frac{\text{جا } ٤٥}{\text{جتا } ٤٥} = ١$$

$$\text{٤} \quad \text{لحساب النسب المثلثية لأي زاوية غير ٣٠ أو ٦٠ أو ٤٥ نحسبها باستخدام الآلة}$$

$$\text{فمثلا جا } ٣٦ \text{ تكتب على الآلة: } \sin ٣٦ \quad \text{جتا } ٥٠ \text{ تكتب: } \cos ٥٠ \quad \text{وهكذا}$$

حساب قياس الزاوية بمعلومية النسبة المثلثية لها

- إذا كان جتا هـ = ٠,٧١٥٢ فإن ق (هـ) = $\hat{h} = \text{shift cos } ٠,٧١٥٢ = ٤٤,٢^\circ$
- إذا كان جا هـ = ٠,٦٢١٨ فإن ق (هـ) = $\hat{h} = \text{shift sin } ٠,٦٢١٨ = ٣٨^\circ$
- إذا كان ظا هـ = ١,٥١٥٦ فإن ق (هـ) = $\hat{h} = \text{shift tan } ١,٥١٥٦ = ٥٦^\circ$
- إذا كان جتا هـ = ٠,٥ فإن ق (هـ) = $\hat{h} = ٦٠^\circ$ وإذا كان ظا هـ = ١ فإن ق (هـ) = $\hat{h} = ٤٥^\circ$

مساب مكات

مثال ١

أوجد قيمة المقدار التالي مبينا خطوات الحل:

$$\text{جا } ٤٥ \text{ جتا } ٤٥ + \text{جا } ٣٠ \text{ جتا } ٦٠ - \text{جتا } ٣٠$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{صفر} \end{aligned}$$

مثال ٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

$$\text{جتا } ٦٠ = ٢ \text{ جتا } ٣٠ - ١$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{الأيمن} &= \text{جتا } ٦٠ = \frac{1}{2} \\ \text{الأيسر} &= ٢ \text{ جتا } ٣٠ - ١ \\ \frac{1}{2} &= ١ - \frac{\sqrt{3}}{2} \times ٢ = ١ - \sqrt{3} \\ \therefore \text{الأيمن} &= \text{الأيسر} \end{aligned}$$

مثال ٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

$$\text{جتا } ٦٠ \text{ جا } ٣٠ - \text{جا } ٦٠ \text{ جتا } ٣٠$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال ٤

بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

$$\text{جا } ٣٠ = ٥ \text{ جتا } ٦٠ - \text{ظا } ٤٥$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{الأيمن} &= \text{جا } ٣٠ = \frac{1}{2} \\ \text{الأيسر} &= ٥ \text{ جتا } ٦٠ - \text{ظا } ٤٥ \\ &= ٥ \left(\frac{1}{2} \right) - ١ \\ \frac{1}{2} &= ١ - \frac{5}{2} = ١ - \frac{1}{2} \times ٥ \\ \therefore \text{الأيمن} &= \text{الأيسر} \end{aligned}$$

مثال ٥

أوجد قيمة المقدار: $\frac{\text{جتا } ٦٠ + \text{جتا } ٣٠}{\text{جا } ٦٠ \text{ ظا } ٦٠}$

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times ١ = \frac{1}{3} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} =$$

مثال ٦

اثبت أن: $\frac{٢ \text{ ظا } ٣٠}{٣٠ \text{ ظا } ١} = ٦٠$

الحل

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيمن} &= ٦٠ \text{ ظا } ٣٠ \\ \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}} &= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times ٢ \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \text{الأيمن} &= \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \end{aligned}$$

حساب مثلثات

مثال ٧

أوجد قيمة \sin التي تحقق :
ظا $\sin = 4$ جتا 60° جا 30°
حيث \sin زاوية حادة

الحل

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 4 = \sin$$

$$\frac{1}{4} \times 4 = \sin$$

$$\sin = 1$$

$$\therefore \sin = 45^\circ$$

مثال ٨

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة \sin حيث :
 $2 \sin = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ جا 60°

الحل

$$2 \sin = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$2 \sin = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$2 \sin = 1$$

$$\therefore \sin = \frac{1}{2} \quad \therefore \sin = 30^\circ$$

مثال ٩

أوجد قيمة \sin حيث \sin زاوية حادة إذا كان :
جا $\sin = \sin 60^\circ - \sin 30^\circ$ جتا 60° جا 30°

الحل

$$\sin = \sin 60^\circ - \sin 30^\circ$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \sin$$

$$\therefore \sin = 30^\circ$$

مثال ١٠

أوجد قيمة \sin التي تحقق
 $2 \sin = \sin 60^\circ - \sin 2^\circ$ ظا 5°
حيث \sin زاوية حادة

الحل

$$2 \sin = \sin 60^\circ - \sin 2^\circ$$

$$2 \sin = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \sin = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \sin = 1$$

$$\sin = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin = 30^\circ$$

مثال ١١

إذا كان جا $\sin = 30^\circ$ جتا 5°
فأوجد \sin حيث \sin زاوية حادة

الحل

$$\sin = \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} \times \frac{1}{4} = \sin$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \sin$$

$$\therefore \sin = 60^\circ$$

مثال ١٢

إذا كانت جا $\sin = \sin 30^\circ$ جا 60°
حيث \sin زاوية حادة فأوجد قيمة : \sin جتا \sin جا \sin

الحل

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sin$$

$$\sin = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin = 30^\circ$$

$$\sin = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 =$$

تفصيل
معلم رياضيات
محمود عوض

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

$$\text{جتا } 60^\circ \text{ جا } 30^\circ - \text{جا } 60^\circ \text{ ظا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ$$

الحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن:

$$\text{ظا } 60^\circ - \text{ظا } 45^\circ = \text{جا } 30^\circ$$

الحل

٣ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان:

$$\text{ظا } 2^\circ \text{ س} = \text{جا } 4^\circ \text{ جا } 30^\circ \text{ جتا } 30^\circ$$

الحل

٤ أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التي تحقق:

$$\text{س جتا } 60^\circ = \text{جا } 30^\circ + \text{ظا } 45^\circ$$

الحل

أَسْئَلَةُ اخْتَرِ عَلَى حَسَابِ الْمُثَلَّثَاتِ

- ١) جا ٤٥ جتا ٤٥ =
 (أ) ٢ (ب) ١ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{6}$
- ٢) ٤ جتا ٣٠ ظا ٦٠ =
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) $\sqrt[3]{3}$
- ٣) ٤ جتا ٣٠ ظا ٦٠ =
 (أ) ٣٠ جا (ب) ٦٠ جا (ج) جتا ٤٥ (د) ظا ٣٠
- ٤) إذا كان جا هـ = جتا هـ فإن ق (هـ) =
 (أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٩٠
- ٥) في Δ أ ب ج القائم الزاوية في ب يكون جا أ + جتا ج =
 (أ) ٢ جا ج (ب) ٢ جاب (ج) ٢ جا أ (د) ٢ جتا أ
- ٦) إذا كان جا ٢ س = ٠,٥ وكانت س زاوية حادة فإن ق (س) =
 (أ) ٧٠ (ب) ٦٠ (ج) ١٥ (د) ٣٠
- ٧) إذا كان جتا ٣ س = $\frac{1}{4}$ حيث ٣ س زاوية حادة فإن ق (س) =
 (أ) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ٣٠ (د) ٦٠
- ٨) إذا كان جتا $\frac{س}{4} = \frac{\sqrt[3]{3}}{4}$ حيث س زاوية حادة فإن س =
 (أ) ١٥ (ب) ٢٠ (ج) ٣٠ (د) ٦٠
- ٩) إذا كان جتا $\frac{س}{4} = \frac{1}{4}$ حيث $\frac{س}{4}$ زاوية حادة فإن ق (س) =
 (أ) ١٠٠ (ب) ١٢٠ (ج) ١٣٠ (د) ١١٠
- ١٠) في إذا كان ظا ٣ س = ١ فإن ق (س) =
 (أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٥ (د) ٤٥
- ١١) ظا ٤٥ جا ٣٠ =
 (أ) ١ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{1}{4}$
- ١٢) ظا ٤٥ + جا ٣٠ =
 (أ) ١ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{2}{4}$

تمارين على النسب المثلثية لبعض الزوايا

(ج) أوجد قيمة س التي تحقق الآتي حيث أن س زاوية حادة :

١) ظا س = ٤ جا ٣٠ جتا ٦٠

٢) جا س = ٢ جا ٣٠ جتا ٦٠

٣) جا س = ٣ جا ٣٠ جتا ٦٠

٤) جا س = جا ٦٠ جتا ٣٠ - جتا ٦٠ جا ٣٠

٥) س جا ٣٠ جتا ٤٥ = جتا ٣٠

٦) س - جا ٣٠ جتا ٤٥ = جا ٦٠

٧) ٤ س = جتا ٣٠ ظا ٣٠ - ظا ٤٥

٨) ظا س = جتا ٣٠ - جا ٣٠

٩) س جتا ٦٠ جتا ٤٥ = جا ٦٠

١٠) ٣ ظا س = ٢ جا ٣٠ + ٤ جتا ٦٠

١١) س جا ٤٥ = ظا ٦٠

١٢) جا س جا ٦٠ = ٣ جا ٤٥ جتا ٤٥ - جتا ٦٠

(أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

١) جتا ٣٠ + جتا ٦٠ + جا ٢ جا ٣٠

٢) جتا ٦٠ جا ٣٠ - جا ٦٠ جتا ٣٠

٣) ظا ٦٠ - ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥

٤) $\frac{\text{جا } ٣٠}{\text{جتا } ٦٠} - \text{جتا } ٣٠ \text{ جا } ٦٠$

٥) (جتا ٣٠ - جتا ٦٠) (جا ٦٠ + جا ٣٠)

٦) $\frac{\text{جتا } ٦٠ + \text{جتا } ٣٠ + \text{ظا } ٤٥}{\text{جا } ٦٠ \text{ ظا } ٦٠ + \text{جا } ٣٠}$

(ب) بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن:

١) ٤ جا ٤٥ جتا ٤٥ = ٢

٢) جتا ٦٠ = ٥ جا ٣٠ - ظا ٤٥

٣) جتا ٦٠ = جتا ٣٠ ظا ٣٠ - ظا ٤٥

٤) ظا ٦٠ - ظا ٤٥ = جا ٦٠ + جتا ٦٠ + جا ٣٠

٥) ٢ جا ٣٠ + ٤ جتا ٦٠ = ظا ٦٠

٦) جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠

٧) جا ٤٥ ظا ٦٠ - ٢ جا ٦٠ = صفر

٨) ٤ جا ٣٠ + ظا ٤٥ = ظا ٦٠

٩) جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠

١٠) جتا ٦٠ = جتا ٣٠ - جا ٣٠

١١) جا ٣٠ = ٩ جتا ٦٠ - ظا ٤٥

١٢) ظا ٦٠ = ٢ ظا ٣٠ ÷ (١ - ظا ٣٠)

(د) إذا كان ظا س = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ حيث س زاوية حادة

فأوجد قيمة: جا س ظا $\left(\frac{3}{4}\right)$ + جتا (٢س)

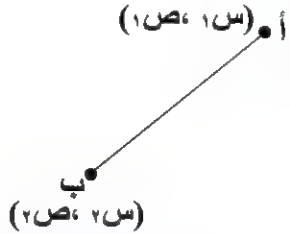
(هـ) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ ج

فأوجد قيمة: جتا ج جا أ - جا ج جتا أ

البعد بين نقطتين

إذا كانت النقطة أ (س_١، ص_١) ، النقطة ب (س_٢، ص_٢) فإنه يمكن حساب البعد بين النقطتين بالقانون:



$$\text{البعد بين نقطتين} = \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}$$

$$\text{أي أن البعد} = \sqrt{\text{مربع فرق السينات} + \text{مربع فرق الصادات}}$$

مثال ١

أوجد البعد بين النقطتين (٢، ٣) ، (١، ٥)

الحل

$$\begin{aligned} \text{البعد} &= \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} \\ &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (5 - 3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

مثال ٢

إذا كانت أ (٢، ٦) ، ب (١، ١) فأوجد طول أ ب

الحل

$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} \\ &= \sqrt{(2 - 1)^2 + (6 - 1)^2} \\ &= \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول} \end{aligned}$$

ملاحظات هامة

١) لحساب طول ضلع نحسب البعد بين نقطة بدايته ونقطة نهايته.

٢) البعد بين النقطة (س، ص) ونقطة الأصل $\sqrt{s^2 + v^2}$

٣) بعد النقطة (س، ص) عن محور الصادات = |س| بينما بعد النقطة عن محور السينات = |ص|

مثال : بعد النقطة (٥-، ٢-) عن محور الصادات = ٥ ، بعد النقطة (٤-، ٣-) عن محور السينات = ٤

٤) نوع المثلث بالنسبة لأضلاعه ٣ أنواع : متساوي الساقين - متساوي الأضلاع - مختلف الأضلاع

٥) نوع المثلث بالنسبة لزاياه ٣ أنواع : حاد - قائم - منفرج

قوانين المساحات

◆ مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولَي القطرين

◆ مساحة الدائرة = πr^2 نق

◆ محيط الدائرة = $2\pi r$ نق

◆ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × ع

◆ مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

◆ مساحة المستطيل = الطول × العرض

إثباتات هامة باستخدام البعد

إثبات أنه: Δ أ ب ج قائم في ب

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج **ثم نربع النواتج**
نثبت أن: (أ ج)² الأكبر = (أ ب)² + (ب ج)²

إثبات أنه: Δ أ ب ج حاد

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج **ثم نربع النواتج**
نثبت أن: (أ ج)² الأكبر > (أ ب)² + (ب ج)²

إثبات أنه: الشكل أ ب ج د معين

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة
- نثبت أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول
أ ب = ب ج = ج د = د أ

إثبات أنه: الشكل مربع

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة **والقطران**
- نثبت أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول
- نثبت أن القطران متساويان

إثبات أنه: أ ، ب ، ج رؤوس مثلث

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج
نثبت ن: مجموع طولى أي ضلعين < طول الثالث
مثل: أ ب + ب ج < أ ج

إثبات أنه: Δ أ ب ج منفرج

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج **ثم نربع النواتج**
نثبت أن: (أ ج)² الأكبر < (أ ب)² + (ب ج)²

إثبات أنه: الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة
- نثبت أن: كل ضلعان متقابلان متساويان
أى أن: أ ب = ج د ، ب ج = د أ

إثبات أنه: الشكل مستطيل

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة **والقطران**
- نثبت أنه متوازي أضلاع (كل ضلعان متقابلان متساويان)
- نثبت أن القطران متساويان

إثبات أنه: النقط أ، ب، ج تمر بدائرة مركزها م

نحسب: طول أ م ، ب م ، ج م **بالبعد**
ثم نثبت أن: أ م = ب م = ج م = نق

إثبات أنه: النقط تقع على استقامة واحدة

نحسب: طول أ ب ، ب ج ، أ ج
نثبت أن: الطول الأكبر = مجموع الطولين الآخرين

مثال ١

اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط

أ (٥،٥) ، ب (٧،١-) ، ج (١٥،١٥)
قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد مساحته

الحل

$$أب = \sqrt{(٥-٧)^2 + (٥-١٥)^2} = \sqrt{١٢ + ١٨٠} = \sqrt{١٩٢}$$

$$بج = \sqrt{(٧-١٥)^2 + (١-١٥)^2} = \sqrt{٦٤ + ٢٥٦} = \sqrt{٣٢٠}$$

$$أج = \sqrt{(٥-١٥)^2 + (٥-١٥)^2} = \sqrt{٤٠٠ + ١٠٠} = \sqrt{٥٠٠}$$

$$٥٠٠ = (أج)^2$$

$$٥٠٠ = ٣٢٠ + ١٨٠ = (بج)^2 + (أب)^2$$

∴ (أج) = √((أب)² + (بج)²) ∴ المثلث قائم فى ب

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × ع

$$١٢٠ = \frac{٣٢٠ \sqrt{١٨٠} \times \sqrt{١٢٠}}{٢} =$$

مثال ٢

بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط

أ (٣،٣) ، ب (٥،١) ، ج (٣،١)
بالنسبة لأضلاعه

الحل

$$أب = \sqrt{(٣-٥)^2 + (٣-١)^2} = \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨}$$

$$بج = \sqrt{(٥-٣)^2 + (١-١)^2} = \sqrt{٤ + ٠} = \sqrt{٤}$$

$$أج = \sqrt{(٣-٣)^2 + (٣-١)^2} = \sqrt{٠ + ٤} = \sqrt{٤}$$

$$∴ ب ج = أ ج$$

∴ ∆ متساوى الساقين

مثال ٣

اثبت باستخدام البعد أن النقط

أ (١-،٣-) ، ب (٥،٦) ، ج (٣،٣)
تقع على استقامة واحدة

الحل

$$أب = \sqrt{(١-٥)^2 + (٣-٦)^2} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥}$$

$$بج = \sqrt{(٥-٣)^2 + (٦-٣)^2} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$$

$$أج = \sqrt{(١-٣)^2 + (٣-٣)^2} = \sqrt{٤ + ٠} = \sqrt{٤}$$

$$١٠,٨١٧ = أب ، ١٠,٨١٧ = بج + أج$$

$$∴ أب = بج + أج$$

∴ النقط أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة

مثال ٤

اثبت أن النقط أ (١-،٣-) ، ب (٦،٤-)

، ج (٢،٢) الواقعة فى مستوى إحداثى متعامد تمر بها
دائرة واحدة مركزها م (٢،١-) ثم أوجد محيط الدائرة

الحل

$$أ م = \sqrt{(١-٢)^2 + (٣-٢)^2} = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$$

$$ب م = \sqrt{(٢-٦)^2 + (٢-٤)^2} = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠}$$

$$ج م = \sqrt{(٢-٢)^2 + (٢-١)^2} = \sqrt{٠ + ١} = \sqrt{١}$$

$$∴ أ م = ب م = ج م$$

∴ النقط تمر بها دائرة واحدة

$$\text{محيط الدائرة} = ٢\pi \text{ نق} = ٢ \times ٣,١٤ \times ٥ = ٣١,٤$$

مثال ٥

أ ب ج د شكل رباعي حيث

أ (٣،٥) ، ب (٢،٦) ، ج (١،١) ، د (٤،٠)

اثبت أن الشكل أ ب ج د معين وأوجد مساحته

الحل

$$\overline{أب} = \sqrt{(٣-٢)^2 + (٥-٦)^2} = \sqrt{٢}$$

$$\overline{بج} = \sqrt{(٢-١)^2 + (٦-١)^2} = \sqrt{٢٦}$$

$$\overline{جـد} = \sqrt{(١-٤)^2 + (١-٠)^2} = \sqrt{٢٦}$$

$$\overline{أد} = \sqrt{(٣-٤)^2 + (٥-٠)^2} = \sqrt{٢٦}$$

∴ أ ب = ب ج = ج د = أ د ∴ الشكل معين

مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولا قطريه

$$\overline{أج} = \sqrt{(٣-١)^2 + (٥-١)^2} = \sqrt{٣٢}$$

$$\overline{بـد} = \sqrt{(٢-٤)^2 + (٦-٠)^2} = \sqrt{٧٢}$$

$$\text{مساحة المعين} = \frac{1}{2} \times \overline{أج} \times \overline{بـد} = \frac{1}{2} \times \sqrt{٣٢} \times \sqrt{٧٢} = ٢٤$$

مثال ٦

أ ب ج د شكل رباعي حيث

أ (٤،٢) ، ب (٠،٣) ، ج (٥،٧) ، د (٩،٢)

اثبت أن الشكل أ ب ج د مربع وأوجد مساحته

الحل

$$\overline{أب} = \sqrt{(٤-٠)^2 + (٢-٣)^2} = \sqrt{٥}$$

$$\overline{بج} = \sqrt{(٠-٥)^2 + (٣-٧)^2} = \sqrt{٤١}$$

$$\overline{جـد} = \sqrt{(٥-٩)^2 + (٧-٢)^2} = \sqrt{٤١}$$

$$\overline{أد} = \sqrt{(٤-٩)^2 + (٢-٢)^2} = \sqrt{٢٥}$$

نحسب القطران أ ج ، ب د

$$\overline{أج} = \sqrt{(٤-٥)^2 + (٢-٧)^2} = \sqrt{٨٢}$$

$$\overline{بـد} = \sqrt{(٠-٩)^2 + (٣-٢)^2} = \sqrt{٨٢}$$

∴ أ ب = ب ج = ج د = أ د ، أ ج = ب د

∴ الشكل مربع

$$\text{مساحة المربع} = \overline{أب} \times \overline{أب} = ٥ \times ٥ = ٢٥ \text{ وحدة طول مربعة}$$

مثال ٧

إذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة

(١،٦) يساوى $٥\sqrt{٢}$ فأوجد قيمة س

الحل

$$\text{البعد} = \sqrt{\text{فرق السينات}^2 + \text{فرق الصادات}^2}$$

$$\therefore (٥\sqrt{٢})^2 = (١-٥)^2 + (٦-س)^2$$

$$٥٠ = ١٦ + (٦-س)^2$$

$$٣٤ = (٦-س)^2 \quad \text{ننقل الـ ١٦}$$

$$(٦-س) = \sqrt{٣٤} = ١٦ - ٢٠$$

$$(٦-س) = ٤ \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$٦-س = ٤ \quad \therefore س = ٢$$

$$\therefore س = ٢ \quad \text{أو } ٦-س = -٤ \quad \therefore س = ١٠$$

مثال ٨

إذا كانت أ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ،

ج (١ ، ٥) وكانت أ ب = ب ج فأوجد قيمة س

الحل

$$\overline{أب} = \sqrt{(٣-١)^2 + (٣-٥)^2} = \sqrt{٥}$$

∴ أ ب = ب ج

$$\therefore \overline{بج} = \sqrt{(٣-١)^2 + (٢-٥)^2} = \sqrt{٥}$$

$$٥ = ١ + (٣-س)^2$$

$$(٣-س) = \sqrt{٤} \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$\therefore ٣-س = ٢ \quad \therefore س = ١$$

$$\text{أو } ٣-س = -٢ \quad \therefore س = ٥$$

١

أ ب ج مثلث فيه

أ (٨،٢) ، ب (-٤،١) ، ج (١،٣)

بين نوع المثلث أ ب ج بالنسبة لزواياه

الحل

٢

إذا كانت النقط أ (٢،٣) ، ب (٤،-٣)

، ج (-١،٢) ، د (-٣،٢) هي رؤوس معين

فأوجد مساحة المعين أ ب ج د

الحل

٣

اثبت أن النقط أ (-١،٤) ، ب (١،٠)

، ج (٢،٢) تقع على استقامة واحدة

الحل

٤

إذا كان البعد بين النقطتين أ (٧،٠) ، ب (٠،٣)

يساوى ٥ وحدات طول فأوجد قيمة أ

الحل

أسئلة اختر على درس البعد

- ١) البعد بين النقطتين (٠،٥) ، (٠،٢) هو وحدة طول
 (أ) ٧ (ب) ٥ (ج) $\sqrt{29}$ (د) ٣
- ٢) بعد النقطة (٢،-٤) عن محور السينات =
 (أ) ٤ (ب) ٢ (ج) -٤ (د) ٦
- ٣) المسافة بين النقطة (٣،٤) والمحور الصادي هي وحدة طول
 (أ) ٥ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٧
- ٤) بعد النقطة (٣ ، ٤) عن نقطة الأصل = وحدة طول
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٧ (د) ٥
- ٥) البعد العمودي بين المستقيمين $س - ٢ = ٠$ ، $س + ٣ = ٠$ يساوى
 (أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٢ (د) ٣
- ٦) البعد العمودي بين المستقيمين $ص + ١ = ٠$ ، $ص + ٣ = ٠$ يساوى
 (أ) ٤ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٥
- ٧) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٠،٠) ، (١٢،٥) = وحدة طول
 (أ) ٥ (ب) ٧ (ج) ١٢ (د) ١٣
- ٨) طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠) ، وتمر بالنقطة (٣ ، ٤) يساوى
 (أ) ٧ (ب) ١ (ج) ١٢ (د) ٥
- ٩) البعد بين النقطة (٥ ، ظا ٦٠) ومحور السينات =
 (أ) ٥ (ب) $\sqrt{5}$ (ج) ٣ (د) $\sqrt{3}$
- ١٠) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٤،-١) ، (١٢،٥) = وحدة طول
 (أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٢ (د) ١٣
- ١١) إذا كان البعد بين النقطتين (٠،أ) ، (١،٠) هو وحدة طول فإن أ =
 (أ) -١ (ب) ٠ (ج) ١ (د) $١ \pm$
- ١٢) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول فأى من النقاط الآتية تنتمى للدائرة
 (أ) (٢،١) (ب) (١،-٢) (ج) $(١، \sqrt{3})$ (د) $(١، \sqrt{2})$
- ١٣) النقط (٠،٠) ، (٠،٣) ، (٤،٠) تكون
 (أ) Δ حاد (ب) Δ منفرج (ج) Δ قائم (د) على استقامة واحدة

تمارين على البعد بين نقطتين

١ إذا كانت أ (٨، ٢) ، ب (-٤، ١) ، ج (١، ٣)

اثبت ان المثلث أ ب ج متساوي الساقين

٢ اثبت أن النقط أ (٣، ٥) ، ب (٢، ٣) ،

ج (-٢، ٤) هي رؤوس مثلث

٣ بين نوع المثلث الذي رؤوسه النقط

أ (٠، ٣) ، ب (-٤، ١) ، ج (-٢، ١)

من حيث أطوال أضلاعه

٤ اثبت أن الشكل الذي رؤوسه النقط

أ (-٣، ١) ، ب (١، ٥) ، ج (٤، ٧) ، د (٦، ١)

متوازي أضلاع

٥ أوجد مساحة المستطيل أ ب ج د حيث:

أ (-٣، ١) ، ب (١، ٥) ، ج (٤، ٦) ، د (٦، ٠)

٦ اثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط

أ (٤، ١) ، ب (-٢، ١) ، ج (-٣، ٢)

قائم الزاوية في ب وأوجد مساحته

٧ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٠) ، (١، ٠)

يساوي $2\sqrt{2}$ وحدة طول فأوجد قيمة أ

٨ اثبت أن النقط أ (٣، ٤) ، ب (١، ١)

، ج (-٥، ٣) تقع على استقامة واحدة

٩ اثبت أن النقط أ (-٢، ٠) ، ب (١، ٥)

، ج (٦، ٦) الواقعة في مستوى إحداثي متعامد تمر بها دائرة مركزها (٢، -٣)

ثم أوجد محيط ومساحة الدائرة بدلالة π

١٠ س ص ع ل معين رؤوسه س (٢، ٣) ،

ص (٤، -٣) ، ع (-١، ٢) ، ل (-٢، ٣)

أوجد مساحة سطحه

١١ أ ب ج د شكل رباعي حيث أ (٤، ٢)

، ب (-٣، ٤) ، ج (-٣، ١) ، د (٢، -١)

اثبت أن الشكل أ ب ج د مربع وأوجد مساحة سطحه

١٢ أ ب ج د شكل رباعي حيث أ (٣، ١)

، ب (١، ٥) ، ج (٤، ٦) ، د (٦، ٠)

اثبت أن الشكل أ ب ج د مستطيل

١٣ أ ب ج مثلث حيث أ (٣، ٥)

، ب (٣، -٢) ، ج (-٤، -٢)

بين نوع المثلث أ ب ج بالنسبة لزاياه

١٤ إذا كانت أ (٣، ٤) ، ب (١، ١) ، ج (-٥، -٣)

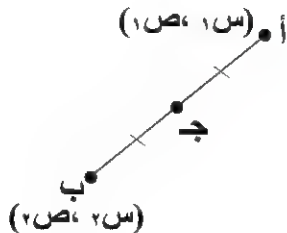
بين هل النقط أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة أم لا؟

١٥ دائرة مركزها النقطة م (٧، ٤) وتمر بالنقطة

(٣، ١) احسب مساحة الدائرة

إحداثى منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت النقطة أ (س١، ص١) ، النقطة ب (س٢، ص٢) فإنه يمكن حساب إحداثى نقطة منتصف أ ب بالقانون:



$$\text{إحداثى المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right) = \left(\frac{\text{س١} + \text{س٢}}{٢}, \frac{\text{ص١} + \text{ص٢}}{٢} \right) =$$

ملاحظات هامة

- ١) **الفكرة المباشرة:** يكون معلوم لديك إحداثى البداية والنهاية وتحسب إحداثى المنتصف (زى مثال ١)
- ٢) **الفكرة غير المباشرة:** يكون معلوم لديك إحداثى المنتصف والبداية وتحسب إحداثى النهاية (زى مثال ٢) أو يكون معلوم لديك إحداثى المنتصف والنهاية وتحسب إحداثى البداية
- ٣) **مجموع السينات** يقصد به سينات البداية والنهاية هي التي تجمع (إياك تجمع سينات المنتصف مع أي حاجة)
- ٤) **متوازي الأضلاع والمربع والمستطيل والمعين فيهم :** القطران ينصف كل منهما الآخر
- ٥) **مركز الدائرة هو منتصف القطر**

مثال ٢ إذا كانت جـ (٦، -٤) هي منتصف أ ب

حيث أ (٥، -٣) فأوجد إحداثى نقطة ب

الحل

نفرض أن ب (س، ص)

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$\therefore (٦، -٤) = \left(\frac{\text{س} + ٥}{٢}, \frac{\text{ص} + ٣}{٢} \right)$$

$$٦ = \frac{\text{س} + ٥}{٢} \quad \text{و} \quad -٤ = \frac{\text{ص} + ٣}{٢}$$

$$١٢ = \text{س} + ٥ \quad \text{و} \quad -٨ = \text{ص} + ٣$$

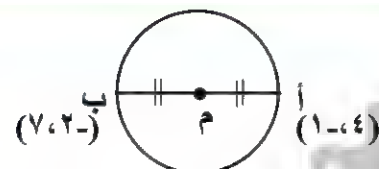
$$\text{س} = ٧ \quad \text{و} \quad \text{ص} = -٥$$

$$\therefore \text{إحداثى ب} = (٧، -٥)$$

مثال ١ إذا كان أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م

حيث أ (٤، -١) ، ب (٢، -٧) فأوجد إحداثى المركز م

الحل



م هي منتصف القطر أ ب

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

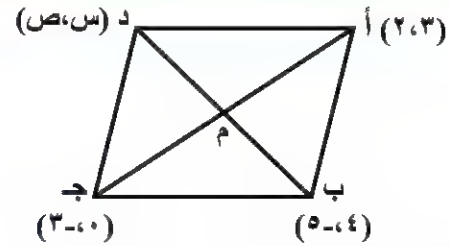
$$= \left(\frac{٤ + ٢}{٢}, \frac{-١ + (-٧)}{٢} \right) =$$

$$= \left(\frac{٦}{٢}, \frac{-٨}{٢} \right) = (٣، -٤)$$

مثال ٣

أ ب ج د متوازي أضلاع فيه
أ (٢، ٣) ، ب (٤، ٥) ، ج (٠، ٣) أوجد إحداثي
نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثي نقطة د

الحل



نقطة تقاطع القطرين هي م منتصف أ ج

$$م \text{ منتصف } أ ج = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{6}{2} \right) = (1, 3)$$

نفرض أن النقطة د هي (س، ص)

∴ منتصف أ ج = منتصف ب د

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = \left(\frac{4+س}{2}, \frac{5+ص}{2} \right)$$

المسقط الأول = المسقط الأول | المسقط الثاني = المسقط الثاني

$$\frac{2}{2} = \frac{4+س}{2}$$

$$1 = 4+س$$

$$س = -3$$

$$\frac{3}{2} = \frac{5+ص}{2}$$

$$3 = 5+ص$$

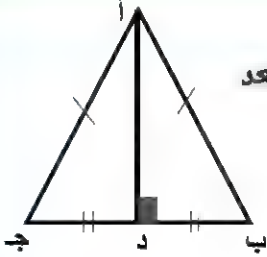
$$ص = -2$$

∴ إحداثي د = (-3، -2)

مثال ٤

اثبت أن النقط أ (٠، ٣) ، ب (٤، ٣)
ج (٦، ١) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين
رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة
من أ وعمودية على ب ج

الحل



إثبات أن Δ متساوي الساقين بالبعد

حساب إحداثي د بالمنتصف

حساب طول أ د بالبعد

$$أ ب = \sqrt{(4-0)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$أ ج = \sqrt{(6-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$أ ج = \sqrt{(6-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

∴ أ ب = أ ج ∴ Δ متساوي الساقين

∴ أ د \perp ب ج ∴ د منتصف ب ج

$$د (\text{منتصف ب ج}) = \left(\frac{4+6}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (5, 2)$$

$$أ (0, 3) ، د (5, 2)$$

$$أ د = \sqrt{(5-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$\sqrt{26} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول}$$

٦

أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م
حيث ب (٨، ١) ، م (٥، ٧) فأوجد :
(١) إحداثي النقطة أ (٢) طول نصف قطر الدائرة

الحل



مركز الدائرة م هو منتصف القطر أ ب

نفرض أن إحداثي أ = (س، ص)

$$\left(\frac{س+٨}{2}, \frac{ص+١}{2} \right) = (5, 7)$$

$$\left(\frac{س+٨}{2}, \frac{ص+١}{2} \right) = (5, 7)$$

$$٧ = \frac{س+٨}{2} \quad ٥ = \frac{ص+١}{2}$$

$$١٤ = س+٨ \quad ١٠ = ص+١$$

$$٦ = س \quad ٩ = ص$$

إحداثي أ = (٦، ٩)

$$\text{طول نصف القطر م ب} = \sqrt{(٨-٦)^2 + (١-٩)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

٥

إذا كانت أ (-١، ١) ، ب (٢، ٣) ، ج (٦، ٠)
د (٣، -٤) اثبت أن أ ج ، ب د ينصف كل منهما الآخر

الحل

$$\text{منتصف أ ج} = \left(\frac{-1+6}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{منتصف ب د} = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{3+(-4)}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2} \right)$$

∴ منتصف أ ج = منتصف ب د

∴ أ ج ، ب د ينصف كل منهما الآخر

مثال ٩

اثبت أن النقط أ (٠، ٦) ، ب (٤، ٢) ، ج (-٢، ٤) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ، ثم أوجد إحداثي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب ج د مستطيلاً

الحل

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

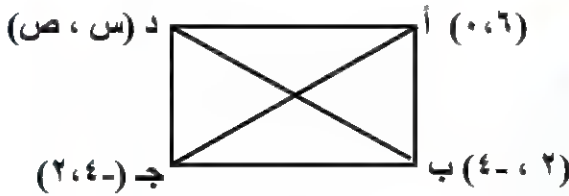
$$\sqrt{(-2-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{104} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104}$$

$$104 = (أج)^2$$

$$104 = 32 + 72 = (بج)^2 + (أب)^2$$

$$\therefore (أج)^2 = (أب)^2 + (بج)^2 \therefore \text{المثلث قائم}$$



$$\text{منتصف أ ج} = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = (1, 4)$$

نفرض أن د = (س، ص)

$$\text{منتصف ب د} = \left(\frac{4+س}{2}, \frac{2+ص}{2} \right)$$

$$\left(\frac{4+س}{2}, \frac{2+ص}{2} \right) = (1, 4)$$

المسقط الأول = المسقط الأول | المسقط الثاني = المسقط الثاني

$$1 = \frac{4+س}{2}$$

$$1 = \frac{2+ص}{2}$$

$$2 = 4+س$$

$$2 = 2+ص$$

$$6 = ص$$

$$0 = س$$

$$\therefore \text{إحداثي د} = (0, 6)$$

مثال ٧

إذا كانت أ (٦، ١) ، ب (٢، ٩) فأوجد إحداثيات النقط التي تقسم أ ب إلى أربعة أجزاء متساوية الطول

الحل



$$\text{إحداثي المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{2}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{2} \right)$$

$$\text{إحداثي ج (منتصف أ ب)} = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{1+9}{2} \right) = (4, 5)$$

$$\text{إحداثي د (منتصف أ ج)} = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = (4, 3)$$

$$\text{إحداثي هـ (منتصف ب ج)} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{9+5}{2} \right) = (3, 7)$$

مثال ٨

إذا كانت النقط (١، ٣) في منتصف البعد بين النقطتين (٣، ص) ، (١، ١) فأوجد النقط (س، ص)

الحل



$$\text{إحداثي المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{2}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{2} \right)$$

$$\therefore (1, 3) = \left(\frac{3+س}{2}, \frac{ص+1}{2} \right)$$

$$1 = \frac{3+س}{2}$$

$$3 = \frac{ص+1}{2}$$

$$2 = 3+س$$

$$6 = ص+1$$

$$-1 = س$$

$$5 = ص$$

$$\therefore (س، ص) = (-1, 5)$$

١ أ ب ج د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م
حيث أ (١، -٣) ، ج (١، ٧)
أوجد إحداثي نقطة م

الحل

٢ إذا كانت النقطة أ (٢، ٣) هي منتصف ب ج
حيث ج (-١، ٣) فأوجد إحداثي نقطة ب

الحل

٣ إذا كانت ج (س ، -٣) منتصف أ ب بحيث
أ (-٣، ص) ، ب (٩، ١١) فأوجد قيمة س + ص

الحل

٤ إذا كان أ ب قطر في الدائرة م حيث أ (٤ ، -١) ،
ب (-٢ ، ٧) فأوجد إحداثي مركز الدائرة م
وطول نصف قطر الدائرة

الحل

أسئلة اختر على درس المنتصف

- ١ إذا كانت أ (٩،١-) ، ب (١-،١-) فإن إحداثي منتصف \overline{AB} هو
 (أ) (٠،٤) (ب) (٤،٠) (ج) (٩،١) (د) (٤،١-)
- ٢ إذا كان \overline{AB} قطر في دائرة م حيث أ (٥-، ٣) ، ب (١، ٥) فإن مركز الدائرة م هو
 (أ) (٢-،٤-) (ب) (٢-،٤) (ج) (٢،٢) (د) (٢-،٨)
- ٣ إذا كان \overline{AB} جـ د مربع ، أ (٤،٣) ، جـ (٦،٥) فإن إحداثي نقطة تقاطع قطريه =
 (أ) (١٠،٨) (ب) (٨،١٠) (ج) (٥،٤) (د) (٢٤،١٥)
- ٤ إذا كانت (٢،٣) منتصف \overline{AB} حيث أ (٢-،٣) فإن إحداثي ب هو
 (أ) (٦،٣) (ب) (٠،٠) (ج) (٦،٠) (د) (٥،١)
- ٥ إذا كانت جـ (٣-،ص) منتصف \overline{AB} حيث أ (٦-،س) ، ب (٨-،١) فإن س + ص =
 (أ) ١١- (ب) ١١ (ج) ١٨- (د) ١٤-
- ٦ إذا كانت (١،٢) تنصف البعد بين النقطتين (٤-،٣) ، (٦،س) فإن س =
 (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ١- (د) ١

تمارين على إحداثي المنتصف

١ أوجد إحداثي نقطة منتصف \overline{AB} حيث

أ (٤، ٢) ، ب (٦، صفر)

٢ إذا كانت النقطة جـ (١، ٣) هي منتصف البعد

بين النقطتين أ (١، ص) ، ب (٣، س)

فاوجد النقطة (س، ص)

٣ \overline{AB} جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ

حيث أ (١-،٣) ، ب (٢،٦) ، جـ (٧،١)

أوجد إحداثي كل من النقطتين هـ ، د

٤ \overline{AB} قطر في الدائرة التي مركزها م فإذا كانت

ب (١١،٨) ، م (٧،٥) فاوجد

(١) إحداثي نقطة أ (٢) محيط الدائرة بدلالة π

٥ \overline{AB} جـ د مستطيل فيه:

أ (١-،٣) ، ب (٣، ٥) ، جـ (٤، ٦) فاوجد:

(١) إحداثي نقطة د

(٢) مساحة المستطيل \overline{AB} جـ د

٦ اثبت أن النقط أ (٣،٥) ، ب (٢-،٣) ، جـ (٤-،٢-) هي رؤوس مثلث منفرج الزاوية في ب

ثم أوجد إحداثي نقطة د التي تجعل \overline{AB} جـ د معين

وأوجد مساحة سطحه

٧ \overline{AB} جـ د متوازي أضلاع فيه أ (٤،٣) ،

ب (١-،٢) ، جـ (٣-، ٤-) أوجد إحداثي د

خذ هـ أ د حيث أ هـ = ٢ أ د

ميل الخط المستقيم

يرمز للميل بالرمز m ويمكن حسابه بالقوانين التالية :
(حسب المعطى في المسألة تختار القانون المناسب)

إذا كان المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها θ

٢



$$m = \tan \theta$$

إذا كان المستقيم يمر بنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) فإن:

١

$$m = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

إذا كان للمستقيم معادلة على الصورة $ax + by + c = 0$ (ص لوحدها)

٤

$$m = -\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

إذا كان للمستقيم معادلة على الصورة $ax + by + c = 0$ (س مع بعض)

٣

$$m = -\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

تصميم
معلم رياضيات
محمود عوض

ملاحظات هامة

١ تعريف الميل: هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٢ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ويوازي محور الصادات فإن: السينات تكون متساوية

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $(3, 5)$ ، $(4, 3)$ ويوازي محور الصادات فإن $m = 3$

٣ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ويوازي محور السينات فإن: الصادات تكون متساوية

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $(2, -4)$ ، $(6, 4)$ ويوازي محور السينات فإن $m = -4$

٤ المستقيم الموازي لمحور السينات ميله = صفر ، بينما الموازي لمحور الصادات ميله غير معرف

٥ إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون الميل موجب

إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون الميل سالب

٦ يمكن قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات بمعلومية الميل: $\text{الميل} \rightarrow \tan \rightarrow \text{shift}$

تدريبات على حساب الميل

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لحوور السينات زاوية قياسها 30°

الحل

$$\text{الميل م} = \text{ظا ه} = \text{ظا } 30^\circ =$$

١ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(3, 6)$ ، $(1, 2)$

الحل

$$\text{الميل م} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

٤ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$$2\text{ص} = 6\text{س} + 1$$

الحل

$$\text{الميل م} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{6}{2} = 3$$

٣ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$$4\text{س} - 7\text{ص} = 1$$

الحل

$$\text{الميل م} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

٦ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لحوور السينات زاوية قياسها 45°

الحل

٥ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(5, 3)$ ، $(1, -4)$

الحل

٨ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$$3\text{ص} = 2\text{س} - 1$$

الحل

٧ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$$5\text{ص} + 2\text{س} = 3$$

الحل

متفوقين أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته $5 = \frac{\text{ص}}{3} + \frac{\text{س}}{2}$ (بطريقتين)

الحل

٩ إذا كانت ب $(3, 5)$ ، ج $(-1, 7)$ فأوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها ب ج مع الاتجاه الموجب لحوور السينات

الحل

$$\text{ميل ب ج} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{5-7}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{م} = \text{ظا ه} \quad \therefore \text{ظا ه} = 1 \quad \therefore \text{ق (ه)} = 45^\circ$$

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

إذا كان المستقيمان متعامدان فإن:

$$m_1 \times m_2 = -1 \text{ أو } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

لإثبات أن المستقيمان متعامدان :

$$\text{نثبت أن: } m_1 \times m_2 = -1$$

أو ميل = صفر والميل الآخر غير معرف

لو عندك مستقيمين متعامدين وعايز قيمة مجهول:

$$\text{نحسب: } m_1, m_2$$

ثم نساوى : الميل المجهول = - شقلوب المعلوم

$$\text{إذا كان ميل مستقيم } = \frac{3}{4} \text{ فإن ميل العمودى عليه } = -\frac{4}{3}$$

$$\text{إذا كان ميل مستقيم } = -1 \text{ فإن ميل العمودى عليه } = \dots\dots$$

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

إذا كان المستقيمان متوازيان فإن:

$$\text{ميل الأول} = \text{ميل الثانى}$$

$$m_1 = m_2$$

لإثبات أن المستقيمان متوازيان :

$$\text{نحسب: } m_1, m_2 \text{ ونثبت أن: } m_1 = m_2$$

لو عندك مستقيمين متوازيين وعايز قيمة مجهول:

$$\text{نحسب: } m_1, m_2$$

ثم نساوى : الميل المجهول = الميل المعلوم

$$\text{إذا كان ميل مستقيم } = \frac{3}{4} \text{ فإن ميل الموازى له } = \frac{3}{4}$$

$$\text{إذا كان ميل مستقيم } = -2 \text{ فإن ميل الموازى له } = \dots\dots$$

مثال ٢ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين

$(-4, 3)$ ، $(2, -3)$ عمودى على المستقيم

المر بالنقطتين $(2, 1)$ ، $(-2, 3)$

مثال ١ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين

$(1, 2)$ ، $(3, 6)$ يوازى المستقيم الذى يصنع مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 45°

الحل

$$m_1 = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{2 - 4}{-3 - 3} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$m_2 = \frac{1 - 2}{3 - (-2)} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$$

∴ المستقيمان متعامدان

الحل

$$m_1 = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{2 - 1}{6 - 3} = \frac{1}{3}$$

$$m_2 = \tan 45^\circ = 1$$

∴ المستقيمان متوازيان

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

مثال ١

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢) ، (٠، ٠) يوازي المستقيم المار بالنقطتين (٤، ١) ، (٧، ١)

الحل

$$١م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{٣}{٢}$$

$$٢م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٤ - ٧}{١ - ١} = \frac{٣}{٢}$$

∴ المستقيمان متوازيان ١م = ٢م

مثال ٢

أوجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢) ، (٠، ٠)

الحل

$$٢م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٢ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$$

∴ المستقيمان متعامدان

$$١م = \frac{١}{٢م} = \frac{١}{٢}$$

مثال ٣

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٣، ١) ، (٤، ٢) يوازي المستقيم ٣ص - ١س = ٠

الحل

$$١م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٤}{١ - ٢} = \frac{١}{٣}$$

$$٢م = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣}$$

∴ المستقيمان متوازيان ١م = ٢م

مثال ٤

إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط ص (٢، ٤) ، س (٥، ٣) ، ع (٠، ٥) قائم الزاوية في ص فأوجد قيمة أ

الحل

∴ قائم في ص ∴ س ص ⊥ ص ع

$$\text{ميل س ص} = \frac{٥ - ٢}{٣ - ٤} = ٣- \quad \text{ميل ص ع} = \frac{٢ - أ}{٤ - ٥} = \frac{٢ - أ}{٩-}$$

$$١- = ٣- \times ١م = ١م \quad \therefore \text{س ص} \perp \text{ص ع}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{٢ - أ}{٩-} \quad \therefore ١- = أ \quad ٣- = ٢ - أ$$

مثال ٥

إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين (٣، ١) ، (٢، ٢) يصنع زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان ل // ل٢

الحل

$$١م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{١ - ٢}{٣ - ٢} = \frac{١ - ك}{١-}$$

$$٢م = \text{ظا ه} = \text{ظا ٤٥} = ١$$

∴ المستقيمان متوازيان ∴ ١م = ٢م

$$\frac{١ - ك}{١-} = ١ \quad (\text{مقص}) \quad ١ - ك = ١ -$$

$$١ + ١- = ك \quad \therefore ك = \text{صفر}$$

مثال ٦

إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين (٣، ١) ، (٢، ٢) يصنع زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان ل ⊥ ل٢

الحل

$$١م = \frac{١ - ك}{١-} = \frac{١ - ٢}{٣ - ٢} = ١م \quad \text{ظا ٤٥} = ١ = ٢م$$

$$\frac{١-}{٢م} = ١م \quad \therefore \text{المستقيمان متعامدان}$$

المجهول = شقلوب المعلوم

$$\frac{١-}{٢م} = ١م \quad ١- = \frac{١ - ك}{١-}$$

$$٢ = ك \quad \therefore ١ + ١ = ك$$

١

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين
 $(-١, ٤)$ ، $(٣, ٥)$ يوازي المستقيم الذى معادلته
 $٤س - ٧ص - ٩ = ٠$

الحل

٢

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين
 $(٢, ٥)$ ، $(٣, ٤)$ عمودى على المستقيم
الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠°

الحل

٣

إذا كان المستقيمان ل : $٣س - ٤ص - ٣ = ٠$
ل : $٨ - ٤س + ٣ص = ٠$ متعامدين
فأوجد قيمة أ

الحل

٤

إذا كان المستقيم الذى معادلته $٣ص = ٢س + ٦$
يوازي المستقيم الذى معادلته $٦س + كص - ٣ = ٠$
فأوجد قيمة ك

الحل

إثباتات هامة باستخدام الميل

إثبات أن: Δ أ ب ج قائم في ب

نحسب: ميل أ ب ، ب ج (المتعامدان)
نثبت أن: ميل أ ب \times ميل ب ج = - ١

إثبات أن: النقط تقع على استقامة واحدة

نحسب أي ميلين ونثبت أنهما متساويان
مثل: ميل أ ب = ميل ب ج

إثبات أن: الشكل أ ب ج د شبه منحرف

نثبت أن: ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيان
أي أن: ميل ب ج = ميل أ د ، ميل أ ب \neq ميل ج د

إثبات أن: الشكل أ ب ج د معين

- ١- نثبت أنه متوازي أضلاع
- ٢- القطران متعامدان : ميل أ ج \times ميل ب د = - ١

إثبات أن: الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

نثبت أن: كل ضلعان متقابلان متوازيان
أي أن: ميل أ ب = ميل ج د \therefore أ ب // ج د
ميل ب ج = ميل أ د \therefore ب ج // أ د

إثبات أن: الشكل مربع

- ١- نثبت أنه متوازي أضلاع
- ٢- ضلعان متجاوران متعامدان
- ٣- القطران متعامدان

إثبات أن: الشكل مستطيل

- ١- نثبت أنه متوازي أضلاع
- ٢- ضلعان متجاوران متعامدان كالتالي:
ميل أ ب \times ميل ب ج = - ١

مثال ١

اثبت أن النقط أ (١، ٣) ، ب (٥، ٦) ، ج (٣، ٣) تقع على استقامة واحدة

الحل

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{6-3}{5-1} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ميل ب ج} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{3-6}{3-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{ميل أ ب} = \text{ميل ب ج}$$

\therefore النقط تقع على استقامة واحدة

مثال ٢

إذا كانت النقط (١، ٠) ، (٣، ٠) ، (٥، ٢) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ

الحل

نحسب الميل من النقط (١، ٠) والنقط (٣، ٠)

$$١م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{0-0}{3-1} = \frac{0}{2} = ٠$$

نحسب الميل من النقط (١، ٠) والنقط (٥، ٢)

$$٢م = \frac{2-0}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{النقط تقع على استقامة واحدة} \therefore ١م = ٢م$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \therefore ٢ = ١$$

مثال ٣

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (١، ٣) ، ب (٥، ٦) ، ج (٤، ٦) ، د (٦، ٠) هي رؤوس مستطيل

الحل

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{6-3}{5-1} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ميل ب ج} = \frac{6-6}{4-5} = \frac{0}{-1} = ٠$$

$$\text{ميل ج د} = \frac{0-6}{6-4} = \frac{-6}{2} = -٣$$

$$\text{ميل أ د} = \frac{3-0}{1-6} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \text{ميل أ ب} = \text{ميل ج د} \therefore \text{أ ب} \parallel \text{ج د}$$

$$\therefore \text{ميل ب ج} = \text{ميل أ د} \therefore \text{ب ج} \parallel \text{أ د}$$

\therefore الشكل متوازي أضلاع

لإثبات أنه مستطيل نثبت أن ضلعان متجاوران متعامدان

$$\therefore \text{ميل أ ب} \times \text{ميل ب ج} = ٣ \times \frac{1}{3} = ١$$

$$\therefore \text{أ ب} \perp \text{ب ج} \therefore \text{الشكل مستطيل}$$

مثال ٣

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (٥، ٣) ، ب (٦، ٢) ، ج (١، ١) ، د (٠، ٤) هي رؤوس معين

الحل

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{2-3}{6-5} = \frac{-1}{1} = -١$$

$$\text{ميل ب ج} = \frac{1-2}{1-6} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{ميل ج د} = \frac{4-1}{0-1} = \frac{3}{-1} = -٣$$

$$\text{ميل أ د} = \frac{4-3}{0-5} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore \text{ميل أ ب} = \text{ميل ج د} \therefore \text{أ ب} \parallel \text{ج د}$$

$$\therefore \text{ميل ب ج} = \text{ميل أ د} \therefore \text{ب ج} \parallel \text{أ د}$$

\therefore الشكل متوازي أضلاع

لإثبات أنه معين نثبت أن القطران متعامدان

$$\text{ميل أ ج} = \frac{1-3}{1-5} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ميل ب د} = \frac{2-4}{6-0} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{ميل أ ج} \times \text{ميل ب د} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{القطران متعامدان} \therefore \text{الشكل معين}$$

١

اثبت أن النقط أ (١،٥) ، ب (٣،٧) ، ج (١،٣) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الحل

٢

أ ب ج د شكل رباعي حيث أ (-١،١) ، ب (٥،٠) ، ج (٦،٥) ، د (٢،٤) فاثبت أن الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

الحل

٣

اثبت أن النقاط أ (٣،٢) ، ب (٢،٦) ، ج (١،٠) ، د (-١،٢) تكون رؤوس شبه المنحرف

الحل

٤

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (٠،٦) ، ب (٢،٤) ، ج (-٢،٤) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب

الحل

أُسْئَلَة اختَر على درس الميل

- ١ ميل المستقيم الموازي لمحور السينات =
 (أ) -١ (ب) **صفر** (ج) ١ (د) غير معرف
- ٢ ميل المستقيم الذي معادلته ٣ س - ٤ ص + ١٢ = ٠ هو
 (أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $-\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{4}{3}$ (د) $-\frac{3}{4}$
- ٣ المستقيم الذي معادلته ٣ ص = ٢ س + ٦ ميله
 (أ) ٢ (ب) $-\frac{3}{2}$ (ج) $-\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{2}$
- ٤ إذا كان أ ب // ج د وكان ميل أ ب = ٠,٧٥ فإن ميل ج د =
 (أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$ (ج) ٠,٢٥ (د) ٠,٥٧
- ٥ إذا كان أ ب \perp ج د ، وكان ميل أ ب = $\frac{2}{3}$ فإن ميل ج د =
 (أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $-\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{4}{9}$
- ٦ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه أ (٤، ٣) ، ب (١، -٢) فإن ميل ب ج =
 (أ) -٣ (ب) ٣ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $-\frac{1}{3}$
- ٧ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١، ص) ، (٤، ٣) ميله يساوي ظا ٥ فإن ص =
 (أ) ١ (ب) ٤ (ج) -١ (د) **٢**
- ٨ إذا كان ميل المستقيم أ س - ص + ٥ = ٠ يساوي ٣ فإن قيمة أ =
 (أ) ٥ (ب) -٥ (ج) ١ (د) ٣
- ٩ إذا كان المستقيمان اللذان ميلهما $\frac{3}{2}$ ، $\frac{6}{5}$ متوازيان فإن ك =
 (أ) ٦ (ب) -٤ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) ٢
- ١٠ إذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ متعامدين فإن ك =
 (أ) -٢ (ب) -١ (ج) ١ (د) ٢
- ١١ إذا كان ج د يوازي محور الصادات حيث ج (٤، ٤) ، د (٥، ٧) فإن ك =
 (أ) ٥ (ب) ٧ (ج) -٥ (د) ٤
- ١٢ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ (٨، ٣) ، د (٢، ٤) يوازي محور السينات فإن ك =
 (أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٨
- ١٣ إذا كان المستقيم ل س - ٥ ص + ٧ = صفر يوازي محور السينات فإن ل =
 (أ) **صفر** (ب) ١ (ج) ٥ (د) ٧

تمارين على ميد الخط المستقيم

١ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٥،٠) ،

(٢،٣) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

٢ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣) ،

(٥،٤) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية ٤٥° مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات

٣ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٣،١) ، (٤،٢)

يوازى المستقيم الذى معادلته ص - س = ٥

٤ أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها أ ب

مع الاتجاه السالب لمحور السينات حيث

أ (٢، ٣) ، ب (١، ٦)

٥ إذا كان المستقيم الذى معادلته أ س + ٢ ص - ٧ = ٠

يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥°

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد قيمة أ

٦ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢) ،

(١، ك) عموديا على مستقيم ميله - ٣

فأوجد قيمة ك

٧ إذا كانت معادلتى المستقيمين ل١ ، ل٢ هما على الترتيب:

٢ س - ٣ ص + ١ = ٠ ، ٣ س + ب ص - ٦ = ٠

فأوجد قيمة ب التي تجعل:

(١) ل١ // ل٢ (٢) ل١ ⊥ ل٢

٨ اثبت أن النقط أ (٣، ٤) ، ب (١، ١) ، ج (٣، ٥)

تقع على استقامة واحدة

٩ اثبت أن النقط أ (٥، ٢) ، ب (٣، ٢) ،

ج (٢، ٤) ليست على استقامة واحدة

١٠ اثبت أن الشكل الرباعى أ ب ج د الذى رؤوسه

أ (٣، ١) ، ب (١، ٥) ، ج (٤، ٧) ، د (٦، ١)

متوازى أضلاع

١١ أ ب ج د شكل رباعى حيث :

أ (٢، ٣) ، ب (٣، ٤) ، ج (٢، ١) ، د (٣، ٢)

اثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب ج د معين

١٢ اثبت باستخدام الميل أن المثلث الذى رؤوسه

أ (٤، ١) ، ب (٢، ١) ، ج (٣، ٢)

قائم الزاوية في ب

١٣ إذا كانت أ (١، ٠) ، ب (١، ٤)

، ج (٧، ٨) ، د (٩، ٤) فاثبت أن

الشكل أ ب ج د مستطيل

١٤ أ ب ج د شكل رباعى حيث :

أ (٤، ٢) ، ب (٤، ٣) ، ج (١، ٣) ، د (١، ٢)

اثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب ج د مربع

معادلة الخط المستقيم

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية: ① الميل ② طول الجزء المقطوع من محور الصادات

$$ص = م س + ج$$

وتكون المعادلة على الصورة:

مثال ٢ أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$

ويقطع من محور الصادات جزءا سالباً طوله ٣ وحدات

الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = \frac{1}{3} ، ج = -٣$$

$$المعادلة هي: ص = \frac{1}{3} س - ٣$$

مثال ١ أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٣ ويقطع

من محور الصادات جزءاً موجباً طوله ٥ وحدات

الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = ٣ ، ج = ٥$$

$$المعادلة هي: ص = ٣ س + ٥$$

ملحوظة عند حساب قيمة ج

لحساب الجزء المقطوع لازم يكون معاك: ① ميل المستقيم المطلوب معادلته

② زوج مرتب يمر به المستقيم المطلوب معادلته (خذ منه قيمة س ، ص)

مثال ٢ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين

(٦ ، ١) ، (٣ ، ٢)

الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{١ - ٢}{٦ - ٣} = \frac{-١}{٣} = -\frac{1}{3}$$

من الزوج (٣، ٢) نأخذ س = ٢ ، ص = ٣

$$٣ = -\frac{1}{3} \times ٢ + ج$$

$$٩ = -٢ + ج$$

$$المعادلة هي: ص = -\frac{1}{3} س + ٩$$

مثال ١ أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{1}{5}$

ويمر بالنقطة (٣ ، ٥)

الحل

$$ص = م س + ج ، م = \frac{1}{5}$$

من الزوج (٣، ٥) نعوض عن س = ٣ ، ص = ٥

$$٥ = \frac{1}{5} \times ٣ + ج$$

$$٥ = \frac{٣}{٥} + ج$$

$$المعادلة هي: ص = \frac{1}{5} س + ٥$$

مثال ٣

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣، ١)، (١، -٣)
ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل

الحل

$$ص = م س + ج$$

$$٣ = \frac{١-}{٢-} = \frac{٣-}{١-} = م$$

من (٣، ١) بالتعويض عن : س = ١ ، ص = ٣ ، م = ٣

$$ج + ١ \times ٣ = ٣ \quad ج + ٣ = ٣$$

$$ج = ٠$$

∴ المعادلة هي : ص = ٣ س

لإثبات أنه يمر بنقطة الأصل نعوض عن س = ٠

$$∴ ص = ٠ \times ٣ = ٠ ∴ يمر بنقطة الأصل$$

مثال ٤

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٢
ويمر بالنقطة (١، ٠)

الحل

$$ص = م س + ج$$

من الزوج المرتب (١، ٠)

نعوض عن س = ١ ، ص = ٠

$$٠ = ٢ \times ١ + ج$$

$$٠ = ٢ + ج$$

$$∴ ج = -٢$$

∴ المعادلة هي : ص = ٢ س - ٢

تصميم محمود عوض م

معلم رياضيات

مثال ٥

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة

(٣، -٥) ويوازي المستقيم س + ٢ ص - ٧ = ٠

الحل

$$ص = م س + ج$$

$$٣ = \frac{١-}{٢-} = \frac{معامل س}{معامل ص} = م$$

$$\frac{١-}{٢-} = م \quad \text{المستقيمان متوازيان}$$

بالتعويض عن س = ٣ ، ص = -٥ ، م = $\frac{١-}{٢-}$

$$٥- = ٣ \times \frac{١-}{٢-} + ج \quad ج + \frac{٣-}{٢-} = ٥-$$

$$ج = ٥- - \frac{٣-}{٢-} = \frac{٧-}{٢-}$$

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{١-}{٢-}$ س + $\frac{٧-}{٢-}$

مثال ٦

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٤)

وعمودى على المستقيم ٥ س - ٢ ص + ٧ = ٠

الحل

$$ص = م س + ج$$

$$٣ = \frac{٥-}{٢-} = \frac{معامل س}{معامل ص} = م$$

$$\frac{٢-}{٥-} = م \quad ∴ \text{المستقيمان متعامدان}$$

بالتعويض عن س = ٣ ، ص = ٤ ، م = $\frac{٢-}{٥-}$

$$٤ = \frac{٢-}{٥-} \times ٣ + ج \quad ج + \frac{٦-}{٥-} = ٤$$

$$ج = ٤ - \frac{٦-}{٥-} = \frac{٢٦}{٥}$$

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{٢-}{٥-}$ س + $\frac{٢٦}{٥}$

مثال ٧

مستقيم ميله $\frac{1}{4}$ ويقطع من محور الصاداتجزءاً طوله وحدتان أوجد :
(١) معادلة المستقيم (٢) نقطة تقاطعه مع محور السينات

الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = \frac{1}{4} ، ج = 2$$

$$\therefore \text{المعادلة هي: } ص = \frac{1}{4} س + 2$$

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات

نعوض في المعادلة عن ص = ٠

$$0 = \frac{1}{4} س + 2$$

$$\frac{1}{4} س = -2$$

$$س = -2 \times 4 = -8$$

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات هي (-8، 0)

مثال ٨

أوجد معادلة المستقيم الذى يصنع زاوية

موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ١٣٥
ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله ٥ وحدات

الحل

$$ص = م س + ج$$

$$م = \tan 135^\circ$$

$$= -1$$

حسبناها باستخدام الآلة الحاسبة

$$ج = 5$$

معادلة المستقيم هي:

$$ص = -س + 5$$

تصميم محمود عوض م
معلم رياضيات

مثال ٩

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة

(٢، ١) وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين

أ (٢، ٣) ، ب (٥، ٤)

الحل

$$\text{ميل أ ب} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{المستقيمان متعامدان} \therefore م = -3$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٢، ١)

بالتعويض عن س = ١ ، ص = ٢ ، م = -3

$$ص = م س + ج$$

$$2 = -3 \times 1 + ج$$

$$ج = 2 + 3 = 5$$

∴ المعادلة هي: ص = -3س + 5

مثال ١٠

أوجد معادلة المستقيم العمودى على أ ب

من نقطة منتصفها حيث أ (٣، ١) ، ب (٥، ٣)

الحل

$$م = \frac{3-5}{1-3} = 1$$

∴ المستقيمان متعامدان ∴ م = -1

$$\text{منتصف أ ب} = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (4, 2)$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٤، ٢) نأخذ س = ٢ ، ص = ٤

$$ص = م س + ج$$

$$4 = -1 \times 2 + ج$$

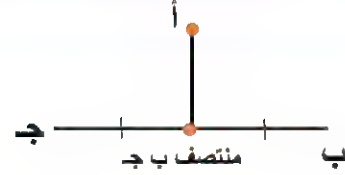
$$ج = 6$$

∴ المعادلة هي: ص = -س + 6

مثال ١١

إذا كانت أ (٤، ٣-) ، ب (١، -٥) ، ج (٥، ٣) فأوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ وينصف ب ج

الحل



$$\text{منتصف ب ج} = \left(\frac{٥ + ١}{٢}, \frac{٣ + (-٥)}{٢} \right) = (٣, -١)$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة أ (٤، ٣-) وبمنتصف ب ج (٣، -١)

$$\therefore \frac{٣ - ٤}{٣ - ٤} = \frac{٣ - (-١)}{٣ - ٤} = ١$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٣، -١)

∴ نعوض عن س = ٤ ، ص = ٣

$$٣ + \frac{٨}{٣} = ٣ \quad \text{ج} + ٤ \times \frac{٣}{٣} = ٣$$

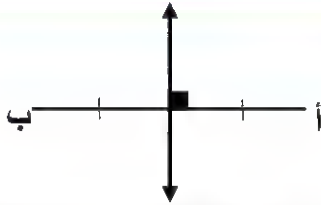
$$\frac{٢٢}{٣} = \text{ج} \quad \therefore \quad \frac{٨}{٣} + ٣ = \text{ج}$$

$$\therefore \text{المعادلة هي: ص} = \frac{٢}{٣} + \text{س} = \frac{٢٢}{٣}$$

مثال ١٢

إذا كانت أ (٣، ٢-) ، ب (٥، ٠) فأوجد معادلة محور تماثل أ ب

الحل



محور تماثل القطعة المستقيمة

هو المستقيم العمودي عليها من منتصفها

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق السينات}}{\text{فرق الصادات}} = \frac{٢ - ٠}{٣ - ٥} = -١$$

∴ محور التماثل \perp أ ب ∴ ميل محور التماثل = ١

لحساب قيمة ج :

∴ محور التماثل يمر بنقطة منتصف أ ب

$$\text{منتصف أ ب} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$= \left(\frac{٥ + ٣}{٢}, \frac{٠ + ٢}{٢} \right) = (٤, ١)$$

∴ محور التماثل يمر بالنقطة (٤، ١)

بالتعويض في المعادلة ص = م س + ج

$$١ = ٤ + ١ \times \text{س} = ٤ + \text{س}$$

$$٣ = \text{ج} \quad ٤ = ١ + \text{ج}$$

معادلة محور التماثل هي : ص = س - ٣

مثال ١٣

أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزءين موجبين طوليهما ٤ ، ٩

الحل

$$\text{ص} = \text{م س} + \text{ج}$$

∴ المستقيم يمر بالنقطتين (٤، ٠) ، (٠، ٩)

$$\text{م} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٠ - ٩}{٤ - ٠} = -\frac{٩}{٤}$$

$$\therefore \text{ج} = ٩$$

$$\therefore \text{المعادلة هي: ص} = -\frac{٩}{٤} \text{س} + ٩$$

مثال ١٤

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ميل المستقيم $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءا سالبا من محور الصادات مقداره ٣ وحدات

الحل

$$\text{نظبط شكل المعادلة} \quad \frac{\text{ص} - ١}{\text{س}} = \frac{١}{٣} \quad (\text{مقص})$$

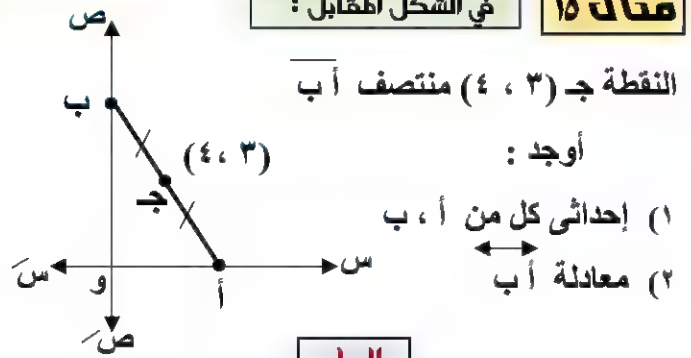
$$٣ \text{ص} - ٣ = \text{س} \quad \leftarrow \quad ٣ \text{ص} - \text{س} = ٣$$

$$\text{م} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣} \quad \text{ج} = ٣$$

$$\therefore \text{المعادلة هي: ص} = \frac{١}{٣} \text{س} + ٣$$

مثال ١٥

في الشكل المقابل :



الحل

∴ أ تقع على محور السينات ∴ $A = (س, ٠)$

∴ ب تقع على محور الصادات ∴ $B = (٠, ص)$

منتصف $\overline{AB} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$

$$\left(\frac{٠ + ص}{٢}, \frac{س + ٠}{٢} \right) = (٤, ٣)$$

$$\frac{ص}{٢} = ٤ \quad \frac{س}{٢} = ٣$$

$$ص = ٨ \quad س = ٦$$

$$\therefore B = (٨, ٠) \quad A = (٠, ٦)$$

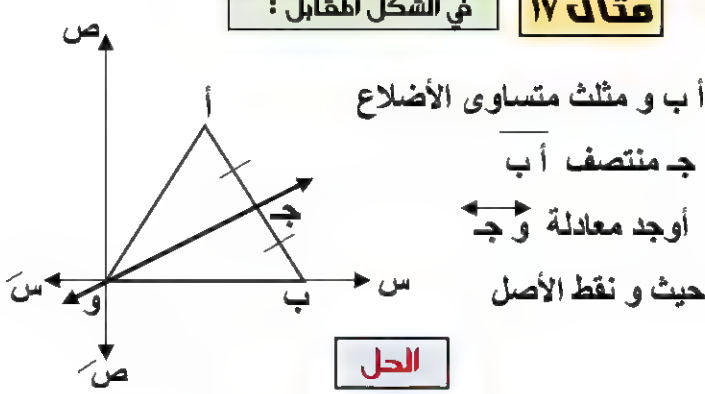
معادلة \overline{AB} : $ص = م س + ج$

$$\text{ميل } \overline{AB} = \frac{٠ - ٨}{٦ - ٠} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣} \quad \therefore ج = ٨$$

$$\therefore \text{معادلة } \overline{AB} \text{ هي } ص = ٨ + س \cdot \frac{٤}{٣}$$

مثال ١٧

في الشكل المقابل :



الحل

∴ أ و ب \triangle متساوي الأضلاع

$$\therefore \angle AOB = ٦٠^\circ$$

∴ ج منتصف \overline{AB} (أي أن \overleftrightarrow{OJ} متوسط في المثلث)

∴ \overleftrightarrow{OJ} ينصف $\angle AOB$

$$\therefore \angle JOB = ٣٠^\circ$$

وهي الزاوية التي يصنعها \overleftrightarrow{OJ} مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\therefore \text{الميل} = ٣٠^\circ \Rightarrow \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

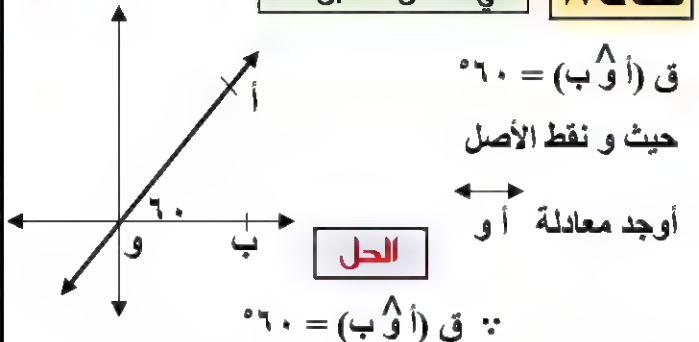
∴ \overleftrightarrow{OJ} يمر بنقطة الأصل و ∴ ج = صفر

$$\therefore ص = م س + ج$$

$$\therefore \text{المعادلة هي } ص = \frac{١}{\sqrt{٣}} س$$

مثال ١٦

في الشكل المقابل :



الحل

$$\therefore \angle AOB = ٦٠^\circ$$

وهي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

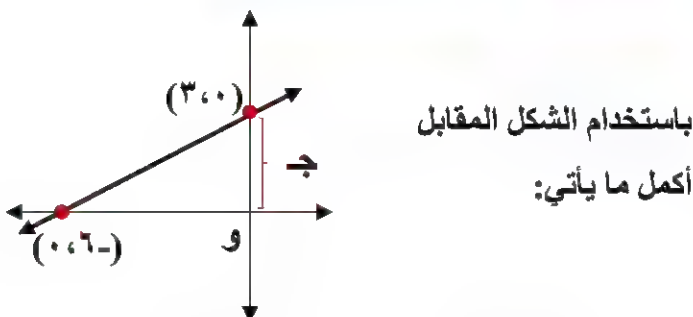
$$\therefore \text{الميل} = ٦٠^\circ \Rightarrow \sqrt{٣}$$

∴ أ و يمر بنقطة الأصل و ∴ ج = صفر

$$ص = م س + ج \quad \therefore \text{المعادلة: } ص = \sqrt{٣} س$$

مثال ١٨

في الشكل المقابل :



(١) طول الجزء المقطوع من محور الصادات =

(٢) طول الجزء المقطوع من محور السينات =

(٣) ميل الخط المستقيم م =

(٤) معادلة الخط المستقيم هي

حساب طول الجزء المقطوع من محور الصادات

إذا كانت المعادلة على الصورة
ص = أ س + ج فإن:

$$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \text{الجزء المقطوع من محور الصادات}$$

إذا كانت المعادلة على الصورة
أ س + ب ص + ج = ٠ فإن:

$$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \text{الجزء المقطوع من محور الصادات}$$

ولكن في الحالتين يكون **طول الجزء المقطوع من محور الصادات** = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$

مثال ١

أوجد الميل و الجزء المقطوع من
محور الصادات للمستقيم ص = ٣س + ١٢

الحل

نظبط المعادلة فتكون:

$$٠ = ١٢ - ٣س - ٢ص$$

$$\text{الميل م} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \text{الجزء المقطوع من محور الصادات}$$

$$٦ = \frac{١٢}{٢} =$$

مثال ٢

أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من
محور الصادات للمستقيم $١ = \frac{ص}{٣} + \frac{س}{٢}$

الحل

لاحظ أن : معامل س = $\frac{١}{٢}$ ، معامل ص = $\frac{١}{٣}$

$$\text{الميل م} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٣}} =$$

$$= \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{١} \times \frac{١}{٢} =$$

$$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} = \text{طول الجزء المقطوع من محور الصادات}$$

$$٣ = \frac{١}{\frac{١}{٣}} =$$

ملاحظات على معادلة الخط المستقيم

١) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : ص = ب

مثال: المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٥) معادلته هي : ص = ٥

٢) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : س = أ

مثال: المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٣ ، ٤) معادلته هي : س = ٣

٣) إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل فإن الجزء المقطوع من محور الصادات ج = صفر

معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ٣ ويمر بنقطة الأصل هي : ص = ٣س

معادلة المستقيم الذي ميله يساوي واحد ويمر بنقطة الأصل هي : ص = س

٤) معادلة محور السينات هي ص = صفر ، معادلة محور الصادات هي س = صفر

تدريبات

إعداد أ / محمود عوض حسن

١

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢)

ويوازي المستقيم الذي معادلته $ص = ٣س + ٥$

الحل

٢

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ١) ، (٢ ، ٥)

الحل

٣

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥)

عموديا على المستقيم $ص + ٢ = ٧$

الحل

٤

أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور

الصادات للمستقيم الذي معادلته $ص + ٥ = ١٠ - ١٠$

الحل

أسئلة اختر على معادلة المستقيم

١ الخط المستقيم الذى معادلته $3ص = 2س + 6$ يقطع جزءا من محور الصادات طوله = وحدة طول

- (أ) ٦ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣-

٢ المستقيم الذى معادلته $2س - 3ص = 6$ يقطع من محور الصادات جزءا طوله وحدة طول

- (أ) ٦- (ب) ٢- (ج) ٢ (د) $\frac{2}{3}$

٣ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، ٥) ويوازي محور الصادات هي

- (أ) $3 = س$ (ب) $5 = ص$ (ج) $2 = ص$ (د) $5 = س$

٤ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، ٥) ويوازي محور السينات هي

- (أ) $3 = س$ (ب) $5 = ص$ (ج) $2 = ص$ (د) $5 = س$

٥ معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ٣ ويمر بنقطة الأصل هي

- (أ) $3 = س$ (ب) $3 = ص$ (ج) $3 = ص$ (د) $3 = س$

٦ معادلة المستقيم الذى ميله يساوى واحد ويمر بنقطة الأصل هي

- (أ) $1 = س$ (ب) $1 = ص$ (ج) $0 = ص$ (د) $ص = س$

٧ الخط المستقيم $ص - 2س = 5$ يقطع من المحور الصادى جزءا طوله وحدة طول

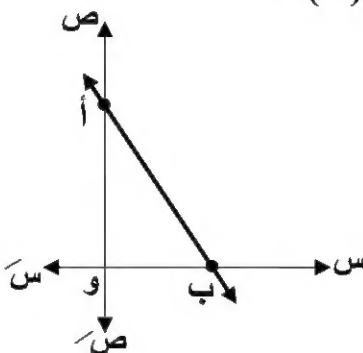
- (أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٠

٨ المستقيم الذى معادلته $ص + 2س = 7$ يقطع من محور السينات جزءا طوله وحدة طول

- (أ) ٢ (ب) ١ (ج) ٧ (د) ٣

٩ مساحة المثلث المحدد بالمستقيمات $ص = 4$ ، $س = 12$ ، $ص = 0$ تساوى وحدة طول مربعة

- (أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٥ (د) ١٢



١٠ فى الشكل المقابل:

إذا كان $أو = 8$ وحدات طول ، $ب و = 6$ وحدات طول

فإن معادلة $أ ب$ هي

- (أ) $ص = \frac{4}{3}س + 8$ (ب) $ص = -\frac{4}{3}س - 8$

- (ج) $ص = \frac{3}{4}س - 8$ (د) $ص = -\frac{4}{3}س + 8$

تمارين على معادلة الخط المستقيم

١٠ إذا كانت أ (٣، ١) ، ب (٥، ٣) فأوجد

معادلة محور تماثل أ ب

١١ أوجد معادلة المستقيم العمودي على أ ب

من نقطة منتصفها حيث أ (٢، ١) ، ب (٤، ٥)

١٢ إذا كانت أ (٥، ٦) ، ب (٣، ٧) ، ج (١، ٣)

فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ

وبمنتصف ب ج

١٣ أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع

من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته:

$$٢س = ٣ص + ٦$$

١٤ أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:

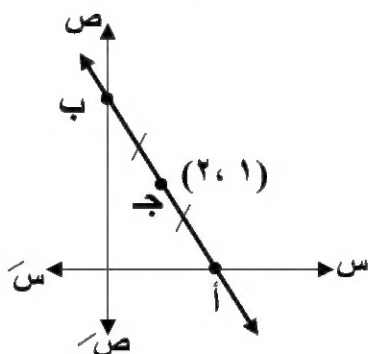
$$٢س - ٦ص = ١٢$$

ثم أوجد نقطتي تقاطعه مع محوري الإحداثيات

١٥ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري

الإحداثيات السيني والصادي جزءين موجبين

طوليها ١ ، ٤ وحدات طول على الترتيب



١٦ في الشكل المقابل:

جـ (١، ٢) منتصف أ ب

فأوجد:

(١) إحداثي أ ، ب

(٢) معادلة أ ب

(٣) مساحة المثلث أ ب جـ

١ أوجد معادلة المستقيم الذي ميله = ٢ ويقطع من

الجزء الموجب لمحور الصادات جزءاً طوله ٧ وحدات

٢ أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي ٣

ويمر بالنقطة (٥، ٠)

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين

(٢، ٣) ، (٣، ٢)

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٢) ،

(٢، ١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٥)

عمودياً على المستقيم الذي ميله $-\frac{1}{3}$

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٥)

ويوازي المستقيم $٢س - ٣ص + ٦ = ٠$

٧ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢، ٥)

عمودياً على المستقيم الذي معادلته $٢س + ٧ = ٠$

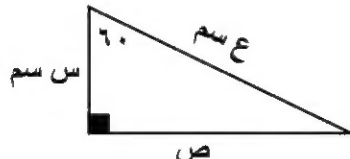
٨ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢، ٥)

ويوازي المستقيم المار بالنقطتين (٢، ١) ، (٢، ٧)

٩ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع جزءاً موجباً

من محور الصادات طوله ٣ وحدات ويوازي المستقيم

$$٢س - ٣ص = ٦$$

- (١) عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الأضلاع =
- (أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) صفر
- (٢) المثلث $أ ب ج$ فيه $أ ب < أ ج$ فإن $ق (ب)$ $ق (ج)$
- (أ) $<$ (ب) $>$ (ج) $=$ (د) \geq
- (٣) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع =
- (أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ١٢٠ (د) ٤٥
- (٤) محيط الدائرة =
- (أ) π نق (ب) π نق^٢ (ج) ٢π نق (د) ٤π نق
- (٥) $\Delta أ ب ج$ المتساوي الساقين إذا كان إحدى زوايا القاعدة = ٣٠° فإن قياس زاوية الرأس =
- (أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (ج) ٧٥ (د) ٣٠
- (٦) $أ ب ج د$ متوازي أضلاع ن فإذا كان $ق (أ) = ٤٠^\circ$ فإن $ق (ب) =$
- (أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (ج) ١٢٠ (د) ١٤٠
- (٧) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة من جهة الرأس
- (أ) ١ : ١ (ب) ٣ : ٢ (ج) ٢ : ١ (د) ١ : ٢
- (٨) إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متساوي الساقين ٢ سم ، ٥ سم فإن طول الضلع الثالث =
- (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ٧
- (٩) مساحة المربع الذي محيطه ١٦ سم = سم^٢
- (أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ١٦ (د) ٢٥٦
- (١٠) مجموع طولى أي ضلعين في مثلث طول الضلع الثالث.
- (أ) أصغر من (ب) يساوى (ج) أكبر من (د) ضعف
- (١١) في الشكل المقابل :
- 
- (أ) $س + ص = ع$ (ب) $ع = س + ص$ (ج) $ع = ٢س$ (د) $ص = ٢ع$
- (١٢) أسطوانة دائرية قائمة إذا كان ارتفاعها = طول نصف قطر قاعدتها نق فإن حجمها = سم^٣
- (أ) π نق^٢ (ب) ٢π نق^٢ (ج) ٢π نق (د) $\frac{٤}{٣} \pi$ نق^٢